14. Võrratuste tõestamine

14.1 Kuidas ei tohi võrratusi tõestada

Võrratusülesannete lahendamisel tehakse sageli tüüpilist loogikaviga, millest tuleb hoiduma õppida.

▪ **Näide 14.1** Olgu meie eesmärk tõestada kõigi reaalarvude x jaoks võrratus

$$-x^4 + x^2 + 2x \geqslant -2x^2 \,. \tag{14.1}$$

Paneme tähele, et iga reaalarvu x korral kehtib $(x^2-1)^2 \geqslant 0$, millest saame $x^4-2x^2+1 \geqslant 0$ ehk $x^4+1 \geqslant 2x^2$. Liidame selle võrratuse tõestatavale võrratusele (14.1) ja saame

$$x^2 + 2x + 1 \geqslant 0 \,,$$

mis on samaväärne tõese võrratusega $(x+1)^2 \geqslant 0$. ▪

Kas see arutelu kujutab endast võrratuse (14.1) korrektset tõestust? Ei, ta ei saa seda olla, sest näiteks juhul $x = 3$ saame võrratusse (14.1) asendades

$$-81 + 9 + 6 \geqslant -2 \cdot 9$$

ehk $-66 \geqslant -18$, mis ei kehti. Niisiis õnnestus meil edukalt “tõestada” vale võrratus! Kuidasmoodi?

Viga peitub arutluse loogikas. Me *alustasime* tõestatavast võrratusest ja *järeldasime* sellest tõese väite, kuigi tegelikult oleks vaja just vastupidi – tõestatav väide peaks ilmuma arutelu *lõpus*, järeldusena.

Probleem seisneb selles, et ka väärast väitest saab järeldada tõest. Seega ei tähenda arutluse lõpus tõese võrratuseni jõudmine automaatselt seda, et algne võrratus tingimata kehtiks. Näites 14.1 liitsime omavahel väära ja tõese võrratuse ning tulemus osutus samuti tõeseks.

Tõestatava võrratuse teisendamine tõestuse otsimise käigus pole iseenesest muidugi keelatud võte, aga seejuures tuleb tähele panna, et kõik kasutatavad teisendused säilitaksid saadavate võrratuste samaväärsuse algse võrratusega. Niisugusteks teisendusteks on näiteks võrratuse mõlemale poolele sama suuruse liitmine-lahutamine ja võrratuse mõlema poole korrutamine-jagamine sama positiivse suurusega.

Ohtlikud operatsioonid, mis võivad väära võrratuse tõeseks muuta, on näiteks võrratuste omavahel liitmine ja korrutamine. Korrutamise üheks erijuhuks on võrratuse poolte ruutu tõstmine, millega tuleb samuti ettevaatlik olla. Nii näiteks saame väärast võrratusest $-3 > 2$ pooli ruutu tõstes tõese võrratuse $9 > 4$. Võrratust $a > b$ (või $a \geqslant b$) tohib teisendamise käigus ruutu tõsta ainult siis, kui me võime kindlad olla, et $a, b \geqslant 0$. Sel juhul saame võrratuse $a^2 > b^2$ mõlemast poolest ruutjuurt võttes võrratusele $a > b$ tagasi minna.

Üldine põhimõte ongi see, et pärast tõestatava võrratuse teisendamist ilmselt tõeseks võrratuseks peame üle kontrollima, et kogu arutelu on pööratav. Sobivaid teisendusi vaatleme lähemalt jaotises 14.2. Olümpiaadiülesande lahenduses tuleb arutelu pööratavus ilmutatult ära mainida, näiteks sõnastuses “Teisendame antud võrratuse samaväärsele kujule”. Selle lause kirjutamata jätmisel arvab hindaja, et lahendaja on teinud näitega 14.1 sarnase loogikavea ja muidu täiesti korrektne lahendus võib saada 0 punkti!

14.2 Kasvavad ja kahanevad funktsioonid

Selles jaotises uurime täpsemalt, millised teisendused annavad vaadeldava võrratusega samaväärse võrratuse.

Üldiselt rakendame me võrratust teisendades tema mõlemale poolele mingit funktsiooni – liidame või lahutame mingi arvu, tõstame võrratuse mõlemad pooled ruutu jne. Tähistame vaadeldava võrratuse poolte avaldisi x_1 ja x_2, võrratusemärki $\,?\,$ ja rakendatavat funktsiooni f. Siis on meie eesmärgiks, et kehtiks samaväärsus

$$\begin{gathered} x_1 \ ?\ x_2 \\ \Updownarrow \\ f(x_1) \ ?\ f(x_2) \end{gathered} \tag{14.2}$$

Selle järelduse pärisuunas tunneme ära kasvava funktsiooni definitsiooni.

Definitsioon 14.1 Ütleme, et funktsioon $f : X \to Y$ on *kasvav*, kui iga $x_1 < x_2$ korral hulgast X kehtib võrratus $f(x_1) < f(x_2)$.

Kuna f on funktsioon, saame $x_1 = x_2$ korral muidugi ka $f(x_1) = f(x_2)$, mistõttu kasvava funktsiooni korral järeldub võrratusest $x_1 \leqslant x_2$ muuhulgas võrratus $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Kogu reaalteljel kasvavad näiteks funktsioonid

- $f(x) = x \pm a$ $(a \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = ax$ $(a > 0)$,
- $f(x) = a^x$ $(a > 1)$,
- $f(x) = x^n$ (n on positiivne paaritu täisarv).

Oma määramispiirkonnas $(0;\infty)$ kasvab ka logaritmfunktsioon $f(x) = \log_a x$ $(a > 1)$. Astmefunktsioon $f(x) = x^n$ kasvab positiivse paarisarvulise n korral ainult piirkonnas $[0;\infty)$.

Need tähelepanekud vastavad koolitunnist tuntud võrratuste teisendamise reeglitele. Näiteks tänu sellele, et funktsioon $f(x) = ax$ on kasvav, kui $a > 0$, võib võrratuse mõlemaid pooli korrutada sama positiivse arvuga. Kuna ruutfunktsioon kasvab piirkonnas $[0;\infty)$, võib mittenegatiivsete pooltega võrratuse mõlemaid pooli aga ruutu tõsta.

Definitsiooniga 14.1 käib loomulikult paaris ka kahaneva funktsiooni definitsioon.

Definitsioon 14.2 Ütleme, et funktsioon $f: X \to Y$ on *kahanev*, kui iga $x_1 < x_2$ korral hulgast X kehtib võrratus $f(x_1) > f(x_2)$.

Analoogiliselt kasvava funktsiooniga järeldub kahaneva funktsiooni f korral võrratusest $x_1 \leqslant x_2$ võrratus $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Niisiis vastavad kahanevatele funktsioonidele võrratuste teisendused, mis pööravad võrratusemärgi vastupidiseks.

Kahanevad on näiteks funktsioonid

- $f(x) = ax$ $(a < 0)$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (piirkondades $x \in (-\infty;0)$ ja $x \in (0;\infty)$),
- $f(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$,
- $f(x) = \log_a x$ $(0 < a < 1,\ x \in (0;\infty))$,
- $f(x) = x^n$ (n on positiivne paarisarv, $x \in (-\infty;0]$).

Jällegi tunneme siin ära koolitunnist tuttavad reeglid, et näiteks negatiivse arvuga korrutamine ja pöördväärtuste leidmine pööravad võrratusemärgi ümber.

Definitsiooni 14.1 põhjal toimetades saame kasvavate funktsioonide rakendamisel esialgu ainult pärisuunas järelduse

$$\begin{gathered} x_1 \ ?\ x_2 \\ \Downarrow \\ f(x_1)\ ?\ f(x_2) \end{gathered}$$

samas kui vaja oleks, et võrratusest $f(x_1)\ ?\ f(x_2)$ järelduks ka $x_1\ ?\ x_2$. Millistel tingimustel kehtib see vastupidine järeldus? Osutub, et alati!

Teoreem 14.1 Olgu $f: X \to Y$ kasvav funktsioon. Siis kehtivad järeldused

1. $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$,
2. $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$,
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Tõestus.

1. Oletame väitevastaselt, et $x_1 \geqslant x_2$. Kuna funktsioon f on kasvav, järelduks sellest võrratusest võrratus $f(x_1) \geqslant f(x_2)$; vastuolu.
2. Tõestus järeldub otse 1. osa tõestusest, vahetades muutujate x_1 ja x_2 rollid.
3. Kui kehtiks võrratus $x_1 < x_2$, peaks tänu funktsiooni f kasvamisele kehtima ka $f(x_1) < f(x_2)$; vastuolu eeldusega $f(x_1) = f(x_2)$. Analoogiliselt jõuab vastuoluni ka võimalus $x_1 > x_2$, niisiis jääb ainsaks võimaluseks $x_1 = x_2$.

□

Harjutus 14.1 Sõnasta ja tõesta teoreemi 14.1 analoog kahaneva funktsiooni jaoks.

Teoreemi 14.1 saab sõnastada ka pöördfunktsiooni mõiste kaudu (vaata jaotist 12 ja definitsiooni 12.1).

Teoreem 14.2 Kasvava funktsiooni pöördfunktsioon on kasvav.

Tõestus. Definitsioonist 14.1 ja teoreemist 14.1 järeldub, et funktsioon $f : X \to Y$ on kasvav parajasti siis, kui iga $x_1, x_2 \in X$ korral kehtib samaväärsus

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)\,. \tag{14.3}$$

Tähistame $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$, siis pöördfunktsiooni definitsiooni järgi $f^{-1}(y_1) = x_1$ ja $f^{-1}(y_2) = x_2$. Niisiis kehtib iga $x_1, x_2 \in X$ jaoks samaväärsus

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2\,. \tag{14.4}$$

See on samaväärsus (14.3) funktsiooni f^{-1} jaoks. Tõestuse lõpetamiseks tuleb näidata, et see samaväärsus kehtib iga y_1, y_2 korral hulgast Y. Kuna Y on funktsiooni f muutumispiirkond, leidub iga $y \in Y$ korral $x \in X$ selliselt, et $f(x) = y$. Niisiis on kõikvõimalikud $y_1, y_2 \in Y$ funktsiooni f väärtustena saavutatavad. Järelikult kehtib seos (14.4) kõigi $y_1, y_2 \in Y$ korral, millest järeldub funktsiooni f^{-1} kasvamine. □

Lihtne on kontrollida, et kasvavad on näiteks teineteise pöördfunktsioonid $f(x) = ax$ ja $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x$ $(a > 0)$, sama 1-st suurema alusega eksponent- ja logaritmfunktsioon ning $f(x) = x^3$ ja $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ruutfunktsioonil $f : \mathbb{R} \to [0;\infty) : f(x) = x^2$ rangelt võttes üheselt defineeritud pöördfunktsiooni ei ole, sest igale positiivsele x^2 väärtusele vastab kaks originaali x ja $-x$. Küll aga saame ruutfunktsioonile pöördfunktsiooni siis, kui vaatleme teda määratuna mittenegatiivsetel reaalarvudel, st funktsioonina $f : [0;\infty) \to [0;\infty) : f(x) = x^2$. Selleks pöördfunktsiooniks on loomulikult ruutjuur $f^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty) : f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Paneme muuhulgas tähele, et $[0;\infty)$ on täpselt ruutfunktsiooni kasvamispiirkond.

Teoreemi 14.1 põhjal piisab samaväärsuse (14.2) jaoks kontrollida, et funktsioon f on oma määramispiirkonnas kasvav. Seejuures tuleb määramispiirkonda vajadusel piirata kasvamispiirkonnaga. Võrratuse pooli ruutu tõstes (ja pöördoperatsioonina ruutjuurides) võime endiselt sattuda jaotises 14.1 kirjeldatud probleemile, kus võrratused $-3 > 2$ ja $9 > 4$ pole samaväärsed. Viga tekib just sellest, kui me ei kontrolli, kas algse võrratuse mõlemad pooled kuuluvad funktsiooni kasvamispiirkonda (antud juhul mittenegatiivsete reaalarvude hulka).

Harjutus 14.2 Sõnasta ja tõesta teoreemi 14.2 analoog kahaneva funktsiooni jaoks.

Kahanev funktsioon f pöörab võrratusemärgi ümber, seega sel juhul saame samaväärsuse

$$\begin{gathered} x_1 \;?\; x_2 \\ \Updownarrow \\ f(x_1) \;\overline{?}\; f(x_2)\,, \end{gathered}$$

kus $\overline{?}$ tähistab ümberpööratud võrdlusmärki $?$.

14.3 Arvvõrratused

Kõige lihtsamal juhul tuleb võrratuseülesannetes uurida kahe konkreetse arvu omavahelist järjestust. Lahendused järgivad tavaliselt üsna sarnast mustrit. Kõigepealt teisendame antud arve ning seejärel rakendame teoreeme 14.1 ja 14.2 sobiva kasvava (või kahaneva) funktsiooni jaoks, et viia tõestatav võrratus samaväärsele, kuid lihtsamale kujule.

Ülesanded

Ülesanne 14.1 (Lõppvoor 2000, 10. klass) Kumb arvudest 2^{2002} ja 2000^{200} on suurem?

Ülesanne 14.2 (Piirkonnavoor 2010, 11. klass) Kas arv $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ on suurem või väiksem arvust 3,5?

Ülesanne 14.3 (Piirkonnavoor 2014, 11. klass) Kumb arvudest $\sqrt[7]{3}$ ja $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem?

Ülesanne 14.4 (Piirkonnavoor 2017, 11. klass) Kumb arvudest $7 + \sqrt{37}$ ja $3\sqrt{19}$ on suurem?

Ülesanne 14.5 (Piirkonnavoor 2016, 12. klass) Kas arvu 6 logaritm alusel 10 on suurem või väiksem arvust $\frac{7}{9}$?

Ülesanne 14.6 (Piirkonnavoor 2021, 12.klass) Kas arv $\log_{2,7} 2$ on suurem või väiksem arvust 0,7?

Ülesanne 14.7 (Piirkonnavoor 2006, 12. klass) Juku arvutas taskuarvutiga avaldise $5 \log 2 + 7 \log 3 - \log 7$ väärtuse. Taskuarvuti piiratud täpsuse tõttu sai ta vastuseks 4. Kas see tulemus on avaldise tegelikust väärtusest suurem või väiksem? (Logaritmid on võetud alusel 10.)

Ülesanne 14.8 (Sügisene lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Kumb arvudest 2^{2014} ja $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$ on suurem?

Ülesanne 14.9 (Kevadine lahtine võistlus 2004, noorem rühm) Kas leidub selline naturaalarv, mille 33. aste on 33-kohaline?

Ülesanne 14.10 (Talvine lahtine võistlus 2023, vanem rühm) Tähistame suvaliste positiivsete reaalarvude x ja y korral kirjutisega $\sqrt[x]{y}$ positiivset reaalarvu z, mille korral $z^x = y$. Tähistame veel $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$.

Kas arv $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ on suurem, väiksem või niisama suur kui arv $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?

Vaata ka ülesandeid 7.15, 14.15, 17.1, 17.2 ja 40.8.

Lahendused

14.1 Vastus: 2000^{200} on suurem.

Proovime kõigepealt kasutada tähelepanekut $2^{2002} > 2^{2000}$. Uurime, millises seoses on arvud 2^{2000} ja 2000^{200}. Selleks teisendame neid ning võtame mõlemast poolest 200. juure. Kuna funktsioon $f(x) = \sqrt[200]{x}$ on reaaltelje positiivses osas kasvav, säilitab see operatsioon võrratusemärgi.

$$\begin{aligned} 2^{2000} &\ ?\ 2000^{200}, \\ (2^{10})^{200} &\ ?\ 2000^{200}, \\ 2^{10} &\ ?\ 2000, \\ 1024 &< 2000. \end{aligned}$$

Niisiis kehtib võrratuste ahel $2^{2002} > 2^{2000} < 2000^{200}$, millest ei saa arvude 2^{2002} ja 2000^{200} omavahelise järjestuse kohta mitte midagi järeldada.

See katsetus ei viinud küll sihile, aga andis meile sellegipoolest väärtuslikku infot. Esiteks on arvude 1024 ja 2000 erinevus peaaegu 2-kordne, mis 200. astmele tõstes annab arvude 2^{2000} ja 2000^{200} jaoks "peaaegu" 2^{200}-kordse erinevuse. Samal ajal $2^{2002} = 2^{2000} \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^{2000}$, erinevus on ainult 4-kordne. Niisiis peaks isegi üsna jämedalt hinnates olema võimalik tõestada võrratus $2^{2002} < 2000^{200}$.

Proovime leida arvu a nii, et $2^{2002} < a < 2000^{200}$ ja mõlemad võrratused oleksid lihtsasti tõestatavad. Kas võiks sobida näiteks $a = 2^{2200}$? Võrratus $2^{2002} < 2^{2200}$ on ilmne, aga kuidas on omavahel järjestatud 2^{2200} ja 2000^{200}?

$$\begin{aligned} 2^{2200} &\ ?\ 2000^{200}, \\ (2^{11})^{200} &\ ?\ 2000^{200}, \\ 2^{11} &\ ?\ 2000, \\ 2048 &> 2000. \end{aligned}$$

Kokkuvõtteks saime võrratuste ahela $2^{2002} < 2^{2200} > 2000^{200}$, niisiis on 2^{2200} keskmise arvu rolli natuke liiga suur, aga mitte enam liiga palju.

Sihile viib näiteks valik $a = 2^{2100}$. Võrratus $2^{2002} < 2^{2100}$ on endiselt ilmne, arvude 2^{2100} ja 2000^{200} võrdlemine aga annab

$$\begin{aligned} 2^{2100} &\ ?\ 2000^{200}, \\ (2^{21})^{100} &\ ?\ (2000^2)^{100}, \\ 2^{21} &\ ?\ 2000^2, \\ 2097152 &< 4000000. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $2^{2002} < 2^{2100} < 2000^{200}$.

14.2 Vastus: väiksem.

Selleks, et võrrelda (positiivseid) arve $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ ja $3{,}5 = \frac{7}{2}$, võime nad tõsta 4. astmele. Kuna $f(x) = x^4$ on positiivsete argumentide korral kasvav, saame samaväärsete võrratuste ahela:

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6} &\ ?\ \frac{7}{2}\,, \\ (\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6})^4 &\ ?\ \left(\frac{7}{2}\right)^4\,, \\ 5^2\cdot 6 &\ ?\ \frac{7^4}{2^4}\,, \\ 150 &\ ?\ \frac{2401}{16}\,, \\ 16\cdot 150 &\ ?\ 2401\,, \\ 2400 &< 2401\,, \end{aligned}$$

seega $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6} < 3{,}5$.

Arvutiülesanne 14.1 Leia arvuti või kalkulaatori abil avaldise $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6}$ ligikaudne väärtus. Kui täpne on ülesandes tõestatud ülemine hinnang 3,5?

14.3 Vastus: $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem.

Selleks, et antud avaldistes juurtest lahti saada, võime mõlemad tõsta 21. astmele. Kuna $f(x) = x^{21}$ on kasvav funktsioon, saame samaväärsete võrratuste ahela:

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{3} &\ ?\ \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\,, \\ \left(\sqrt[7]{3}\right)^{21} &\ ?\ \left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^{21}\,, \\ 3^3 &\ ?\ \frac{5^7}{3^7}\,, \\ 3^3\cdot 3^7 &\ ?\ 5^7\,, \\ 3^{10} &\ ?\ 5^7\,. \end{aligned}$$

Nüüd võime lihtsalt arvutada, et $3^{10} = 59049$ ja $5^7 = 78125$, niisiis $3^{10} < 5^7$, mistõttu ka $\sqrt[7]{3} < \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

14.4 Vastus: $7+\sqrt{37}$ on suurem.

Ülesande avaldised on positiivsed, niisiis võime nad võrdlemiseks ruutu tõsta:

$$\begin{aligned} 7+\sqrt{37} &\ ?\ 3\sqrt{19}\,, \\ (7+\sqrt{37})^2 &\ ?\ (3\sqrt{19})^2\,, \\ 49+14\sqrt{37}+37 &\ ?\ 9\cdot 19\,, \\ 14\sqrt{37}+86 &\ ?\ 171\,, \\ 14\sqrt{37} &\ ?\ 85\,, \\ (14\sqrt{37})^2 &\ ?\ 85^2\,, \\ 196\cdot 37 &\ ?\ 85^2\,. \end{aligned}$$

Nüüd võime vahetult arvutada, et $196\cdot 37 = 7252$ ja $85^2 = 7225$, niisiis $196\cdot 37 > 85^2$ ja kuna kõik teisendused säilitasid võrratusmärgi, peab kehtima ka $7+\sqrt{37} > 3\sqrt{19}$.

14.5 Vastus: suurem.

Arvude $\log 6$ ja $\frac{7}{9}$ võrdlemiseks tuleb vabaneda logaritmist. Selleks astendame arvu 10 mõlemaga neist. Kuna $10 > 1$, on nii $\log x$ kui 10^x kasvavad funktsioonid, seega on saadavad võrdlusseosed samaväärsed:

$$\begin{aligned} \log 6 \ &?\ \frac{7}{9}, \\ 10^{\log 6} \ &?\ 10^{\frac{7}{9}}, \\ 6 \ &?\ 10^{\frac{7}{9}}. \end{aligned}$$

Järgmiseks vabaneme ratsionaalarvust astendajas, tõstes mõlemad avaldised 9. astmesse. Võrratusemärk jääb endiselt samapidiseks:

$$\begin{aligned} 6^9 \ &?\ \left(10^{\frac{7}{9}}\right)^9, \\ 6^9 \ &?\ 10^7. \end{aligned}$$

Nüüd leiame vahetu arvutusega, et $6^9 = 10.077.696 > 10^7$, järelikult ka $\log 6 > \frac{7}{9}$.

14.6 Vastus: väiksem.

Arvude $\log_{2,7} 2$ ja 0,7 võrdlemiseks tuleb vabaneda logaritmist. Selleks astendame arvu 2,7 mõlemaga neist. Kuna $2,7 > 1$, on nii $\log_{2,7} x$ kui $2,7^x$ kasvavad funktsioonid, seega on saadavad võrdlusseosed samaväärsed:

$$\begin{aligned} \log_{2,7} 2 \ &?\ 0,7, \\ 2,7^{\log_{2,7} 2} \ &?\ 2,7^{0,7}, \\ 2 \ &?\ 2,7^{0,7}. \end{aligned}$$

Järgmiseks esitame $2,7 = \frac{27}{10}$ ja $0,7 = \frac{7}{10}$ ning tõstame mõlemad pooled 10. astmele. Kuna mõlemal poolel on positiivne arv, jääb võrratus endiselt samapidiseks:

$$\begin{aligned} 2 \ &?\ \left(\frac{27}{10}\right)^{\frac{7}{10}}, \\ 2^{10} \ &?\ \left(\left(\frac{27}{10}\right)^{\frac{7}{10}}\right)^{10}, \\ 2^{10} \ &?\ \left(\frac{27}{10}\right)^7 = \frac{27^7}{10^7}, \\ 2^{10}\cdot 10^7 \ &?\ 27^7. \end{aligned}$$

Jääb üle vahetult arvutada, et $2^{10}\cdot 10^7 = 10.240.000.000$ ning $27^7 = 10.460.353.203$, niisiis $2^{10}\cdot 10^7 < 27^7$ ja järelikult ka $\log_{2,7} 2 < 0,7$.

Harjutus 14.3 Astme definitsiooni järgi peaksime leidma $27^7 = 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27$, st tegema kuus korrutamist üsna ebamugavate arvudega. See on aeganõudev ja veaohtlik, mis ülesande 14.6 puhul võib lõppeda vigase tulemuse ning vale hinnanguga. Kas saaks kuidagi paremini?

Näiteks võime tähele panna, et $27^7 = (3^3)^7 = 3^{21}$. Kuidas see meid aitab?

Kogenud võistlustelkäija võiks teada peast (või kähku välja arvutada), et $3^5 = 243$. Nüüd saame ühe korrutamisega arvutada $3^{10} = 3^5 \cdot 3^5 = 59.049$ ning teise korrutamisega $3^{20} = 3^{10} \cdot 3^{10} = 3.486.784.401$. Jääb üle korrutada viimane arv 3-ga, mis on juba lihtne ülesanne.

Kas suudad seda lahendust veel optimeerida? Kuidas sinu jaoks 3^{21} kõige lihtsam ja veaohutum arvutada on?

14.7 Vastus: suurem.

Teisendame kõigepealt ülesande avaldist logaritmi reeglite abil:

$$5\log 2 + 7\log 3 - \log 7 = \log 2^5 + \log 3^7 - \log 7 = \log \frac{2^5 \cdot 3^7}{7}.$$

Niisiis tuleb võrrelda arve $\log \frac{2^5 \cdot 3^7}{7}$ ja 4. Logaritmist vabanemiseks astendame arvu 10 mõlema võrreldava suurusega:

$$\begin{aligned} \log \frac{2^5 \cdot 3^7}{7} &\ ?\ 4, \\ 10^{\log \frac{2^5 \cdot 3^7}{7}} &\ ?\ 10^4, \\ \frac{2^5 \cdot 3^7}{7} &\ ?\ 10000, \\ 2^5 \cdot 3^7 &\ ?\ 70000. \end{aligned}$$

Jääb üle vahetult arvutada $2^5 \cdot 3^7 = 32 \cdot 2187 = 69984$. Kuna $69984 < 70000$ ja kõik teisendused säilitasid võrratusemärgi, peab Juku vastus 4 olema õigest vastusest suurem.

14.8 Vastus: $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$ on suurem.

Võrdleme ülesandes antud arve ning lihtsustame võrdlust arvu 4 astmete taandamisega:

$$\begin{aligned} 2^{2014} &\ ?\ 3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}, \\ 4^{1007} &\ ?\ 3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}, \\ 4^{603} &\ ?\ 3^{303} \cdot 5^{505}. \end{aligned}$$

Kindlasti kehtib võrratus $5^{505} > 4^{505}$, niisiis piisaks, kui suudaksime lisaks tõestada võratuse $3^{303} > 4^{98}$. Seda saame teha näiteks võrratuste ahelaga

$$3^{303} > 3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100} > 4^{100} > 4^{98}.$$

Niisiis peab kehtima ka võrratus $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505} > 2^{2014}$.

14.9 Vastus: ei.

Paneme tähele, et 10^{33} on vähim 34-kohaline naturaalarv. Niisiis tuleb uurida arvu 9^{33}, sest kui mõne naturaalarvu 33. aste on 33-kohaline, siis peab 9 selle omadusega olema.

Osutub, et ka 9 ei sobi, sest tema 33. aste on ülimalt 32-kohaline; selle tõestuseks näitame, et $9^{33} < 10^{32}$.

Kuna $9 = 3^2$, siis $9^{33} = (3^2)^{33} = 3^{66}$ ja tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega $3^{33} < 10^{16}$. Niisiis peame ülevalt hindama arvu 3 astmeid. Hinnang $3^2 < 10$ pole piisavalt täpne, sest sellest saame 16. astmele tõstes järeldada ainult võrratuse $3^{32} < 10^{16}$.

Otsime mõnda teist arvu 3 astet, mis oleks piisavalt lähedal mõnele "ümmargusele" arvule. Rehkendame:

$$3^1 = 3; 3^2 = 9; 3^3 = 27; 3^4 = 81; 3^5 = 243; 3^6 = 729; 3^7 = 2187; 3^8 = 6561; 3^9 = 19683\,.$$

Niisiis $3^9 < 2 \cdot 10^4$. Selle võrratuse mõlema poole 4. astmele tõstmine annab $3^{36} < 16 \cdot 10^{16}$. Kuna $3^{36} = 3^3 \cdot 3^{33} = 27 \cdot 3^{33}$, saame nüüd vajaliku võrratuste ahela

$$3^{33} < \frac{16}{27} \cdot 10^{16} < 10^{16}\,.$$

Et 9^{33} on ülimalt 32-kohaline, ei saa 9-st väiksemate naturaalarvude 33. astmed ammugi pikemad olla.

14.10 Vastus: sama suur.

Vastavalt ülesandes antud definitsioonile on $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ niisugune positiivne reaalarv, mida astmele $\sqrt{2}$ tõstes saame arvu 2. Samas leiame, et

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2\,.$$

Niisiis on ka $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ niisugune positiivne reaalarv, mida astmele $\sqrt{2}$ tõstes saame arvu 2. Seega on ülesandes antud arvud võrdsed.

14.4 Võrratuste tõestamine järjestamisega

Vahel on võrratuseülesannetes kasulik vaadelda läbi erinevaid juhte sõltuvalt sellest, millises suurusvahekorras on võrratuses esinevad muutujad. Võrratust sobivalt teisendades võib juhtuda, et selle tõesus on igal konkreetsel juhul üsna ilmne.

Ülesanne 14.11 (Piirkonnavoor 2000, 11. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a ja b korral kehtib võrratus $a^5 + b^5 \geqslant a^3b^2 + b^3a^2$.

Lahendus. Viime liikmed ühele poole ning tegurdame saadava avaldise:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &\geqslant a^3b^2 + b^3a^2\,, \\ a^5 + b^5 - a^3b^2 - b^3a^2 &\geqslant 0\,, \\ a^3(a^2 - b^2) + b^3(b^2 - a^2) &\geqslant 0\,, \\ (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Nüüd on selge, et tuleb vaadelda kahte juhtu.

Kui $a \geqslant b$, siis $a^3 \geqslant b^3$ ja $a^2 \geqslant b^2$, mistõttu $a^3 - b^3 \geqslant 0$ ja $a^2 - b^2 \geqslant 0$ ning neid võrratusi korrutades saamegi tõestatava võrratuse.

Kui aga $a < b$, siis $a^3 < b^3$ ja $a^2 < b^2$, mistõttu $a^3 - b^3 < 0$ ja $a^2 - b^2 < 0$. Kahe negatiivse suuruse korrutis on positiivne, niisis sel juhul $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) > 0$. Oleme kõik võimalikud juhud läbi vaadanud.

Ülesanded

Ülesanne 14.12 (Lõppvoor 1998, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvude $a > b > c$ korral kehtib võrratus

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0\,.$$

Ülesanne 14.13 (Lõppvoor 1996, 11. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude x ja y korral kehtib võrratus $x^x y^y \geqslant x^y y^x$.

Ülesanne 14.14 (Talvine lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} + 1 \geqslant x^2 + y^2\,.$$

Ülesanne 14.15 (Sügisene lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Olgu a ja b erinevad positiivsed reaalarvud. Kumb arv on suurem, kas $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{b + \sqrt{a}}$ või $\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{b + \sqrt{b}}$?

Lahendused

14.12 Esimene mõte, mis pähe tuleb, on uurida, kas äkki osutuvad kõik tõestatava võrratuse vasaku poole liikmed positiivseteks või vähemalt mittenegatiivseteks. Kuna $b > c$ ja $a > b$, siis tõepolest $a^2(b-c) \geqslant 0$ ja $c^2(a-b) \geqslant 0$, aga paraku $c - a < 0$, niisiis võib keskmine liige $b^2(c-a)$ olla ka negatiivne. See katse ei viinud lahenduseni.

Proovime järgmiseks võrratuse vasaku poole lahtikorrutamist, mis annab tõestamiseks samaväärse võrratuse

$$a^2 b - a^2 c + b^2 c - b^2 a + c^2 a - c^2 b > 0\,.$$

Ülesande tingimustest teame, et $a - b > 0$, $b - c > 0$ ja $a - c > 0$. Lahenduse ideeks on neid avaldisi omavahel nõnda kombineerida, et tekiks võimalikult palju tõestatava võrratuse vasaku poole liikmeid. Kuna need liikmed on 3. astme üksliikmed, on loomulik uurida, mis juhtub, kui kaksliikmed $a - b$, $b - c$ ja $a - c$ korrutada.

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)(a-c) &= a^2 b - abc - a^2 c + ac^2 - ab^2 + b^2 c + abc - bc^2 = \\ &= a^2 b - a^2 c + ac^2 - ab^2 + b^2 c - bc^2\,.\end{aligned}$$

Saime tõestatava võrratuse vasaku poole avaldise. Kuna $(a-b)(b-c)(a-c) > 0$, olemegi nõutava võrratuse sellega tõestanud.

14.13 Jagame tõestatava võrratuse mõlemad pooled positiivse suurusega $x^y y^x$ ning saame tõestamiseks samaväärse võrratuse

$$\begin{aligned} x^{x-y} y^{y-x} &\geqslant 1\,, \\ \frac{x^{x-y}}{y^{x-y}} &\geqslant 1\,, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} &\geqslant 1\,. \end{aligned}$$

Nüüd vaatame läbi kaks juhtu.

Kui $x \geqslant y$, siis $\frac{x}{y} \geqslant 1$ ja $x - y \geqslant 0$, seega $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1$.

Kui aga $x < y$, siis $\frac{x}{y} < 1$ ja $x - y < 0$, misjuhul $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} = \left(\frac{y}{x}\right)^{y-x} > 1$, sest $\frac{y}{x} > 1$ ja $y - x > 0$. Oleme võimalikud juhud läbi vaadanud ja vajalik võrratus kehtib mõlemal korral.

14.14 Viime ülesande võrratuse samaväärsele kujule, korrutades mõlemad pooled läbi (positiivse) avaldisega $x + y$:

$$x^5 + y^5 + x + y \geqslant x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2\,.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest (vt jaotis 15.2) teame, et

$$\frac{x^5 + x}{2} \geqslant \sqrt{x^5 \cdot x} = \sqrt{x^6} = x^3\,,$$

seega

$$x^5 + y^5 + x + y \geqslant 2x^3 + 2y^3\,.$$

Ülesande võrratuse tõestamiseks piisab seega näidata, et kehtib võrratus

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2y^3 &\geqslant x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2\,, \\ x^3 + y^3 - x^2 y - x y^2 &\geqslant 0\,, \\ (x^2 - y^2)(x - y) &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Nüüd saame kasutada järjestamisvõtet: juhul $x \geqslant y$ kehtivad võrratused $x - y \geqslant 0$ ja $x^2 - y^2 \geqslant 0$, juhul $x < y$ aga võrratused $x - y < 0$ ja $x^2 - y^2 < 0$. Mõlemal juhul saame vastavaid võrratusi korrutades vajaliku võratuse.

14.15 Vastus: $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{b + \sqrt{a}}$ on suurem.

Võrdleme antud avaldisi ja teisendame võrdlust. Kuna kõik avaldised on positiivsed, säilitab ruutu tõstmine võrdluste samaväärsuse.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{b+\sqrt{a}} &\ ?\ \sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{b}},\\
\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^2 &\ ?\ \left(\sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{b}}\right)^2,\\
a+\sqrt{b}+2\sqrt{(a+\sqrt{b})(b+\sqrt{a})}+b+\sqrt{a} &\ ?\ a+\sqrt{a}+2\sqrt{(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})}+b+\sqrt{b},\\
2\sqrt{(a+\sqrt{b})(b+\sqrt{a})} &\ ?\ 2\sqrt{(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})},\\
(a+\sqrt{b})(b+\sqrt{a}) &\ ?\ (a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b}),\\
ab+a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{ab} &\ ?\ ab+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+\sqrt{ab},\\
a\sqrt{a}+b\sqrt{b} &\ ?\ a\sqrt{b}+b\sqrt{a},\\
a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} &\ ?\ 0,\\
(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) &\ ?\ 0.
\end{aligned}
$$

Kuna a ja b on eelduse järgi erinevad positiivsed reaalarvud, piisab, kui vaadata läbi kaks juhtu. Juhul $a > b$ kehtib $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ja järelikult ka $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$. Juhul $a < b$ saame aga $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, järelikult ka siis $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$. Kokkuvõtteks on igal juhul ülaltoodud võrdluste ahela vasakud pooled suuremad; muuhulgas saame, et

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{b+\sqrt{a}} > \sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{b}}.$$