14. Põhivõrratused

14.1 Reaalarvu ruut on mittenegatiivne

Võrratus

$$x^2 \geqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

on üks lihtsamaid ja kõige sagedamini kasutatavaid võrratusi võistlusmatemaatikas. Tema kasutamiseks tuleb uuritav avaldis teisendada täisruuduks või täisruutude summaks, millest saame kohe järeldada avaldise mittenegatiivsuse. Võrdus nulliga kehtib parajasti siis, kui ruutu tõstetav(ad) avaldis(ed) on ise võrdne (võrdsed) nulliga. Raske koht on seejuures enamasti vajaliku teisenduse leidmine.

Harjutus 14.1 Tõesta, et suvaliste reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Lahendus. Korrutame võrratuse mõlemaid pooli 2-ga ja viime kõik liikmed ühele poolele. Saame tõestatava võrratusega samaväärse võrratuse

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geqslant 0\,,$$

mille teiseneb rühmitades kujule

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0\,.$$

See võrratus aga kehtib, sest tema vasak pool on kolme reaalarvu ruudu summa. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b = c$.

Ülesanne 14.1 (Piirkonnavoor 2013, 9. klass) Reaalarvud x, y ja r rahuldavad tingimust

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + r\,.$$

Tõesta, et $r \geqslant -2$.

Lahendus. Viime muutujaid x ja y sisaldavad liikmed võrduse samale poolele ja saame
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = r\,.$$
Avaldised $x^2 - 2x$ ja $y^2 - 2y$ on peaaegu kaksliikmete $x-1$ ja $y-1$ ruudud, kui mõlemale lisada 1. Sellepärast liidame võrduse mõlemale poole veel 2 ja saame
$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= r + 2\,, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= r + 2\,. \end{aligned}$$
Kuna võrduse vasak pool on ruutude summana mittenegatiivne, peab kehtima võrratus $r + 2 \geqslant 0$, millest järeldubki $r \geqslant -2$.

Vahel võib võrratustest olla kasu ka võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamisel, kui õnnestub näidata, et vaadeldavad võrrandid kirjeldavad teatud võrratuse võrdusejuhtu.

Ülesanne 14.2 (Piirkonnavoor 2021, 10. klass) Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2 \\ yz + x^2 = y^2 + z^2 \\ zx + y^2 = z^2 + x^2 \\ \quad xyz = 1 \end{cases}.$$

Lahendus. Vastus: $x = y = z = 1$.

Liites süsteemi kolm esimest võrrandit ja koondades sarnased liikmed saame võrduse
$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2\,.$$
Harjutusest 14.1 teame, et alati $xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, kusjuures võrdus kehtib ainult siis, kui $x = y = z$. Nüüd saame süsteemi viimasest võrrandist, et $x^3 = 1$, millest omakorda järeldubki, et $x = 1$.

Ülesanded

Ülesanne 14.3 (Lõppvoor 1993, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvuliste x ja y väärtuste korral kehtib võrratus
$$x(5x + 2) + y(4x + y) + 5 > 0\,.$$

Ülesanne 14.4 (Lõppvoor 1995, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvu $x \geqslant 0$ korral kehtib võrratus
$$\sqrt{15}(4 + \sqrt{7x}) \leqslant 9\sqrt{4 + 5x}.$$

Ülesanne 14.5 (Piirkonnavoor 1993, 11. klass) Olgu x, y positiivsed arvud ja $x + y = 1$.

Tõesta, et

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geqslant 9\,.$$

Ülesanne 14.6 (Piirkonnavoor 2018, 11. klass) Tõesta, et kõigi reaalarvude x, y ja z korral kehtib võrratus

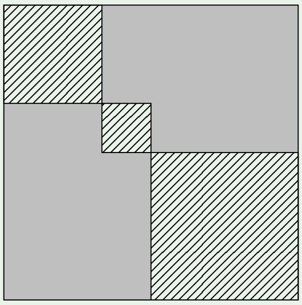
$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \geqslant 2y(x+z)\,.$$

Ülesanne 14.7 (Piirkonnavoor 1995, 12. klass) Näita, et võrrandil $x^2 - 3x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 14.8 (Lõppvoor 2018, 10. klass) Tõesta, et kõigi reaalarvude x, y, z korral

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(xy + yz + zx)\,.$$

Ülesanne 14.9 (Sügisene lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Ruudukujulisel maatükil on kolm erineva suurusega ruudukujulise põhiplaaniga kaubanduskeskust, mis on paigutatud joonisel näidatud viisil (tähistatud viirutatult, mõõtmeid pole teada). Iga kaubanduskeskuse all on kahekorruseline siseparkla ning kaubanduskeskuste kõrval asub kaks ühekorruselist avaparklat (tähistatud halliga). Kumba liiki parklates on rohkem parkimispinda?



Ülesanne 14.10 (Sügisene lahtine võistlus 2015, noorem rühm) Tõesta, et mistahes erinevate reaalarvude a, b ja c korral on vähemalt üks arvudest $(a+b+c)^2 - 8bc$, $(a+b+c)^2 - 8ca$ ja $(a+b+c)^2 - 8ab$ positiivne.

Ülesanne 14.11 (Piirkonnavoor 2000, 10. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}\,.$$

Ülesanne 14.12 (Lõppvoor 2000, 10. klass) Tõesta, et kui arvud a, b, c, d rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2cd \\ b^2 + c^2 = 2da \\ c^2 + d^2 = 2ab \end{cases},$$

siis $a = b = c = d$.

Ülesanne 14.13 (Sügisene lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Kas leiduvad sellised arvud a, b, c, mis rahuldavad võrrandit

$$2a(c-a)-b(2a+b)+c(2b-c)=2020\,?$$

Ülesanne 14.14 (Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Kas leiduvad reaalarvud x, y, z, t, mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 1+x^3+y^2=0\,, \\ 1+y^3+z^2=0\,, \\ 1+z^3+t^2=0\,, \\ 1+t^3+x^2=0\,, \\ x+y+z+t=0\,? \end{cases}$$

Ülesanne 14.15 (Lõppvoor 2001, 11. klass) Olgu x ja y sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $x+y=2$. Tõesta, et

$$x^2y^2(x^2+y^2)\leqslant 2\,.$$

Ülesanne 14.16 (Lõppvoor 2008, 11. klass) Tõesta, et suvaliste reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$a^2+4b^2+8c^2\geqslant 3ab+4bc+2ca\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Lahendused

14.3 Teisendame ülesande avaldist, eraldades täisruudud:

$$\begin{aligned} x(5x+2)+y(4x+y)+5 &= 5x^2+2x+4xy+y^2+5= \\ &= x^2+2x+1+4x^2+4xy+y^2+4= \\ &= (x+1)^2+(2x+y)^2+4\,. \end{aligned}$$

Kahe täisruudu ja ühe positiivse arvu summa peab kokkuvõttes olema positiivne.

14.4 Võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, niisiis jääb võrratus ruutu tõstes algsega samaväärseks:

$$\begin{aligned} 15\cdot(16+8\sqrt{7x}+7x) &\leqslant 81\cdot(4+5x)\,, \\ 240+120\sqrt{7x}+105x &\leqslant 324+405x\,, \\ 0 &\leqslant 84-120\sqrt{7x}+300x\,, \\ 0 &\leqslant 28-40\sqrt{7x}+100x\,, \\ 0 &\leqslant (2\sqrt{7}-10\sqrt{x})^2\,. \end{aligned}$$

Viimane võrratus kehtib, sest tema paremal pool on reaalarvulise avaldise ruut. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $2\sqrt{7}=10\sqrt{x}$ ehk $x=\dfrac{7}{25}$.

14.5 Kuna x ja y on positiivsed, säilitavad järgmised teisendused võrratuse samaväärsuse:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) &\geqslant 9\,,\\ \frac{x+1}{x}\cdot\frac{y+1}{y} &\geqslant 9\,,\\ xy+x+y+1 &\geqslant 9xy\,.\end{aligned}$$

Arvestades lisaks, et $x+y=1$, saame teisendamist jätkata:

$$\begin{aligned}2-8x(1-x) &\geqslant 0\,,\\ 2(1-4x+4x^2) &\geqslant 0\,,\\ 2(1-2x)^2 &\geqslant 0\,.\end{aligned}$$

Viimane võrratus on ülesande võrratusega samaväärne, aga samas ka ilmselt kehtiv, sest suvalise reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

14.6 Sulge lahti korrutades ja kõiki liikmeid ühele poole viies saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz\geqslant 0\,.$$

Saadud avaldis on ebasümmeetriline: y^2 kordaja on 1, teistel liikmetel aga 2 või -2. Kui lisaks püüda esitada seda avaldist kahe kaksliikme ruudu summana, oleks tulemuseks 6 liidetavat, meil aga on ainult 5. Kas mõned sarnased liikmed on koondatud üheks? Kui jah, siis tuleks püüda saadud avaldises mõnda liiget kaheks jagada. Aga millist? Selgub, et sihile viib y^2 pooleksjagamine!

$$\begin{aligned}2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz &= 2x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2+2z^2-2xy-2yz=\\ &= 2x^2-2xy+\frac{1}{2}y^2+2z^2-2yz+\frac{1}{2}y^2=\\ &= \left(\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}z-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\geqslant 0\,.\end{aligned}$$

Oleme uuritava avaldise teisendanud kahe reaalarvu ruudu summaks, mis on mittenegatiivne.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on tunda ära sarnasus avaldisega $(x-y+z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2xz$. Uurime, mis liikmed üle jäävad, ja näeme, et

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz=(x-y+z)^2+x^2+z^2-2xz=(x-y+z)^2+(x-z)^2\,.$$

Oleme jällegi teisendanud vajaliku avaldise kahe ruudu summaks.

14.7 Ülesande avaldises tuleb ära tunda kahe ruudu summa:

$$x^2-3x-2\sqrt{x}+5=x^2-4x+4+x-2\sqrt{x}+1=(x-2)^2+(\sqrt{x}-1)^2\,.$$

See avaldis on kindlasti mittenegatiivne, kusjuures null saab ta olla ainult siis, kui $x=2$ ja $x=1$; see aga pole võimalik. Niisiis peab ülesande avaldis olema iga reaalarvu x korral rangelt positiivne, mistõttu vaadeldaval võrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad.

14.8 Harjutuse 14.1 põhjal teame, et

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx\,.$$

Kuna lisaks $x^2, y^2, z^2 \geqslant 0$, saame kokkuvõttes

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(xy + yz + zx)\,.$$

Teise võimaliku lahenduse saame, kui viime ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4zx \geqslant 0$$

ja paneme tähele, et selle võrratuse vasakul poolel saab liikmeid grupeerida, mis annab järgmised samaväärsed võrratused:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (z^2 - 4zx + 4x^2) \geqslant 0\,,$$
$$(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 2x)^2 \geqslant 0\,.$$

Viimne võrratus aga kehtib, sest tema vasakul poolel on ruutude summa.

14.9 Vastus: kaubanduskeskuste all on rohkem parkimispinda.

Tähistame kaubanduskeskuste küljepikkused vastavalt a, b ja c; siis nende all on parkimispinda kokku $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$. Avaparklate kogupindala on aga

$$(a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2bc + 2ca\,.$$

Võrratuse

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ca$$

tõestasime harjutuses 14.1. Võrdusejuht $a = b = c$ ei saa praegu kehtida, sest ülesande tingimuste kohaselt on kaubanduskeskused erineva suurusega.

14.10 Oletame vastuväiteliselt, et kõik kolm arvu on mittepositiivsed. Avades sulud ja liites kolm saadavat avaldist, on tulemuseks

$$3a^2 + 3b^3 + 3c^3 - 2ab - 2bc - 2ca\,.$$

Paneme tähele, et viimase avaldise saav teisendada ruutude summaks kujul

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\,,$$

mis peab järelikult olema mittenegatiivne. Kuna see avaldis on teisest küljest saadud mittepositiivsete väärtuste summana, on ainus võimalus, et tema enda väärtus on 0. See saab nii olla aga ainult siis, kui

$$a = b = c = a - b = b - c = c - a = 0\,;$$

vastuolu tingimusega, et arvud a, b ja c on erinevad.

14.11 Kuna kõik ülesandes esinevad suurused on positiivsed, saame tõestatava võrratuse mõlemaid pooli ruutu tõstes temaga samaväärse võrratuse. Teisendame võrratust nii, et iga samm säilitab samaväärsuse:

$$(ab + cd)^2 \leqslant (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)\,,$$
$$a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leqslant a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2\,,$$
$$2abcd \leqslant a^2d^2 + c^2b^2\,,$$
$$0 \leqslant (ad - cb)^2\,.$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

Nõutud võrratust saab tõestada ka Cauchy võrratuse abil, vt ülesannet 15.2.

14.12 Süsteemi esimese ja kolmanda võrrandi liitmisel saame

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2+d^2&=2cd+2ab\,,\\
a^2-2ab+b^2+c^2-2cd+d^2&=0\,,\\
(a-b)^2+(c-d)^2&=0\,,
\end{aligned}$$

Järelikult $(a-b)^2=0$ ja $(c-d)^2=0$, mistõttu $a=b$ ja $c=d$. Süsteemi teise võrrandisse asendades saame nüüd

$$\begin{aligned}
a^2+c^2&=2ca\,,\\
a^2-2ac+c^2&=0\,,\\
(a-c)^2&=0\,,
\end{aligned}$$

niisiis kehtib ka võrdus $a=c$.

14.13 Vastus: ei.

Ülesande avaldise vasakut poolt lahti korrutades saame

$$2ac-2a^2-2ab-b^2+2bc-c^2\,.$$

Siin tuleb ära tunda kolmliikme ruudu valem. Täpsemalt paneme tähele, et

$$2ac-a^2-2ab-b^2+2bc-c^2=-(-a-b+c)^2\,.$$

Üks $-a^2$ jääb veel üle, niisiis kokkuvõtteks

$$2a(c-a)-b(2a+b)+c(2b-c)=-(-a-b+c)^2-a^2\,.$$

Kuna $(-a-b+c)^2\geqslant 0$ ja $a^2\geqslant 0$, saame, et ülesade võrrandi vasaku poole avaldis peab olema mittepositiivne ega või järelikult mingite reaalarvude a,b,c korral omandada väärtust 2020.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.28.

14.14 Vastus: ei.

Esimesest võrrandist saame $x^3=-y^2-1<0$, järelikult ka $x<0$. Sama moodi näitame järgmiste võrrandite põhjal, et $y<0$, $z<0$ ja $t<0$. Saadud võrratuste liitmisel saame $x+y+z+t<0$, mis on vastuolus süsteemi viimase võrrandiga.

14.15 Kuna $x,y\geqslant 0$ ning $x+y=2$, leidub $t\in[-1,1]$ nii, et $x=1-t$ ja $y=1+t$. Teeme asenduse ülesande avaldisse:

$$x^2y^2(x^2+y^2)=(1-t)^2(1+t)^2((1-t)^2+(1+t)^2)=(1-t^2)^2(2+2t^2)\,.$$

Nüüd saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule:

$$\begin{aligned}
(1-t^2)^2(2+2t^2)&\leqslant 2\,,\\
(1-t^2)(1-t^2)(1+t^2)&\leqslant 1\,,\\
(1-t^2)(1-t^4)&\leqslant 1\,.
\end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest $0\leqslant 1-t^2\leqslant 1$ ja $0\leqslant 1-t^4\leqslant 1$.

14.16 Teisendame ülesande võrratuse kujule

$$a^2+4b^2+8c^2-3ab-4bc-2ca \geqslant 0$$

ning püüame vasakut poolt esitada täisruutude summana. Aga kuidas täpselt? See polegi nii ilmne. Näiteks kui me üritaksime kasutada võrratust $(a-c)^2 \geqslant 0$ ehk $a^2-2ac+c^2 \geqslant 0$, tuleks lisaks tõestada, et $4b^2+7c^2-3ab-4bc \geqslant 0$. See võrratus pole aga üldjuhul õige, sest muutuja a esineb vasakul poolel ainult ühe korra ja miinusmärgiga. Nii võime selle võrratuse ümberlükkamiseks valida a, mis on b ja c-ga võrreldes suur. Näiteks $a=10, b=1$ ja $c=0$ korral jääks võrratus kujule $4-30 \geqslant 0$, mis ilmselt ei kehti.

Niisiis tuleb liikmeid kuidagi teisiti grupeerida. $-2ca$ vahe ruudu valemi keskmise liikmena ei andnud esimesel katsel tulemust; samuti pole selge, mida hakata peale liikmega $-3ab$. Proovime siis, mida annab lähtumine liikmest $-4bc$.

On kaks lihtsat kaksliikme vahe ruutu, mille lahtikirjutamisel $-4bc$ tekib: $(2b-c)^2$ ja $(b-2c)^2$. Esimene neist annab võrratuse $4b^2-4bc+c^2 \geqslant 0$. Ülesande võrratuse jaoks oleks vaja lisaks tõestada veel $a^2+8c^2-3ab-2ca \geqslant 0$. Analoogiliselt ülaltehtuga näeme aga, et niisugune võrratus ei saa üldjuhul kehtida. Seekord on “halvaks” muutujaks b, mis suudab üksinda vasaku poole negatiivseks muuta; näiteks piisab valida $a=1, b=10$ ja $c=0$.

Uurime siis võrratust $(b-2c)^2 \geqslant 0$ ehk $b^2-4bc+4c^2 \geqslant 0$. Peale selle oleks ülesande võrratuse saamiseks vaja lisaks tõestada

$$a^2+3b^2+4c^2-3ab-2ca \geqslant 0\,.$$

Proovime nüüd grupeerida liikmeid $4c^2$ ja $-2ca$. Neile oleks lisaks tarvis liiget a^2 mingi kordajaga. Milline peaks olema kordaja x väärtus, et $4c^2-2ac+xa^2$ osutuks kaksliikme vahe ruuduks? Muidugi $x=\frac{1}{4}$, sest siis $4c^2-2ac+\frac{1}{4}a^2 = \left(2c-\frac{a}{2}\right)^2$.

Tõestatavast võrratusest jäävad üle liikmed $\frac{3}{4}a^2-3ab+3b^2$. Osutub, et ka see avaldis esitub täisruuduna: $\frac{3}{4}a^2-3ab+3b^2=3\left(\frac{a}{2}-b\right)^2$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$a^2+4b^2+8c^2-3ab-4bc-2ca=3\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+(b-2c)^2+\left(2c-\frac{a}{2}\right)^2 \geqslant 0\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui

$$\frac{a}{2}=b\,,\quad b=2c\quad \text{ja}\quad 2c=\frac{a}{2}\,,$$

ehk siis, kui $(a,b,c)=(4t,2t,t)$ mingi reaalarvu t korral.

14.2 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Definitsioon 14.1 Reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *aritmeetiliseks keskmiseks* nimetatakse suurust
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
ja *geomeetriliseks keskmiseks* suurust
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

Selleks, et geomeetriline keskmine oleks määratud, eeldatakse tavaliselt lisaks, et $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Kahe arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahel on järgmine oluline seos.

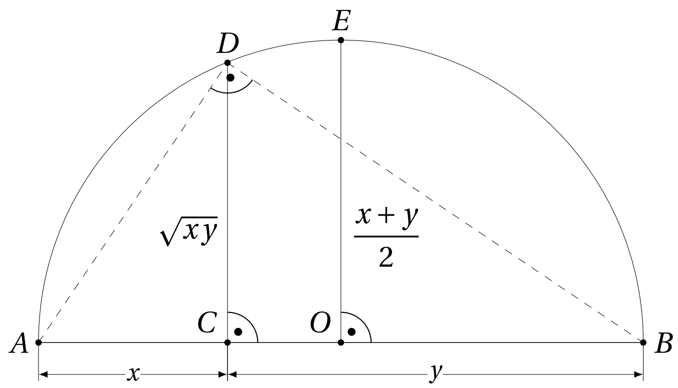
Teoreem 14.1 Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}\,.$$
Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui $x = y$.

Tõestus. Teoreemi võrratus on samaväärne võrratustega
$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}\,,$$
$$x - 2\sqrt{xy} + y \geqslant 0\,,$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0\,.$$

Viimane võrratus on aga tõene, sest iga realarvu ruut on mittenegatiivne. Võrdus kehtib parajasti siis kui $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ ehk $x = y$. □

Kui $\frac{x+y}{2}$ arvutamise juures kasutame me tõepoolest aritmeetilisi operatsioone liitmist ja jagamist, siis mida geomeetrilist on suuruses $\sqrt{xy}$? See tuleb välja teoreemi 14.1 teisest, geomeetrilisest tõestusest.

Tõestus. Vaatleme lõiku AB pikkusega $x + y$ ja joonestame talle kui diameetrile poolringjoone. Olgu C selle lõigu niisugune punkt, et $|AC| = x$ (seega ka $|CB| = y$), ning olgu O lõigu AB keskpunkt. Tõmbame lõigule AB punktides C ja O ristsirged ning lõikugu need poolringjoonega vastavalt punktides D ja E, vt joonist 14.1.



Joonis 14.1

Kuna OE on poolringjoone raadius, siis $|OE| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{x+y}{2}$.

Lõigu CD pikkuse arvutamiseks paneme kõigepealt tähele, et $\triangle ADC \sim \triangle ABD$ tunnuse NN alusel, sest nurk tipu A juures on ühine ning $\angle ACD = 90^\circ$ ja $\angle ADB = 90^\circ$ kui diameetrile toetuv piirdenurk. Sama moodi näitame, et $\triangle ABD \sim \triangle DBC$. Järelikult $\triangle ADC \sim \triangle DBC$. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, seega

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|CB|}\,,$$

millest omakorda saame

$$|CD|^2 = |AC| \cdot |CB| = xy \quad \text{ehk} \quad |CD| = \sqrt{xy}\,.$$

Joniselt 14.1 on ilmne, et $|CD| \leqslant |OE|$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui C on lõigu AB keskpunkt ehk $x = y$. □

Teoreemi 14.1 saab üldistada ka rohkema kui kahe väärtuse keskmistele.

Teoreem 14.2 Olgu antud $n \geqslant 2$ mittenegatiivset reaalarvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Siis kehtib võrratus

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et kui mõni $x_i = 0$, on tõestatava võrratuse parem pool samuti 0 ja võrratus kehtib. Järgnevas võime niisiis eeldada, et arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on kõik positiivsed.

Teeme muutujavahetuse

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\,.$$

Tõestatav võrratus võtab siis kuju

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant n\,. \tag{14.1}$$

Lisaks kehtib tänu muutujavahetusele

$$y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n})^n} = 1\,.$$

Tõestame võrratuse (14.1) matemaatilise induktsiooni meetodil (vaata jaotist 1, et tuletada meelde, kuidas induktsioon täpselt töötab).

Induktsiooni baas $n = 2$ koos võrdusejuhuga järeldub otse teoreemist 14.1:

$$y_1 + y_2 \geqslant 2\sqrt{y_1 y_2} = 2\sqrt{1} = 2\,.$$

Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et suvalise n positiivse arvu korral, mille korrutis on 1, võrratus (14.1) kehtib. Vaatleme nüüd suvalist $n+1$ positiivset arvu $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, mille jaoks $y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n+1} = 1$.

Järjestame arvud y_i mittekahanevalt. Kuna nende korrutis on 1, siis saame $y_1 \leqslant 1$ ja $y_{n+1} \geqslant 1$. Tähistame $z = y_1 y_{n+1}$. Et $z y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, kehtib arvude $z, y_2, \ldots, y_n$ jaoks induktsiooni eeldus. Järelikult kehtib ka võrratus

$$z + y_2 + \ldots + y_n \geqslant n\,.$$

Kuna $y_1 \leqslant 1$ ja $y_{n+1} \geqslant 1$, siis $(1-y_1)(y_{n+1}-1) \geqslant 0$, mis on samaväärne võrratustega $y_1 + y_{n+1} - y_1 y_{n+1} - 1 \geqslant 0$ ja $y_1 + y_{n+1} \geqslant y_1 y_{n+1} + 1 = z + 1$. Kokkuvõttes saame

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} \geqslant z + 1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant n + 1\,,$$

mis tõestab induktsiooni sammu väite.

Võrdus saab kehtida ainult siis, kui $z = y_2 = \ldots = y_n = 1$ ja lisaks $y_1 + y_{n+1} = z + 1 = 2$. Kuna $y_1 y_{n+1} = z = 1$, siis kehtib võrratuses $\frac{y_1 + y_{n+1}}{2} \geqslant \sqrt{y_1 y_{n+1}} = 1$ tegelikult võrdus, mistõttu ka $y_1 = y_{n+1} = 1$. □

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust saab tõestada ka Jenseni võrratuse abil, vt jaotist 16.4.

Harjutus 14.2 Tõesta, et iga positiivse reaalarvu x korral kehtib võrratus

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Lahendus. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest arvude x ja $\frac{1}{x}$ jaoks saame

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1\,,$$

järelikult $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = \frac{1}{x}$ ehk $x^2 = 1$ ehk $x = 1$.

Harjutus 14.3 Tõesta, et kõigi reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy\,,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis kui $x = y$.

Lahendus. Ülesande võrratus on samaväärne võrratusega $(x-y)^2 \geqslant 0$, mis kehtib kõigi reaalarvude korral. Võrdus kehtib parajasti siis kui $x - y = 0$ ehk $x = y$.

Ülesanded

Ülesanne 14.17 (Piirkonnavoor 1993, 12. klass) Tõesta, et täisnurkse kolmnurga pindala ei ole suurem kui üks neljandik hüpotenuusi ruudust. Millisel juhul võib pindala võrduda ühe neljandikuga hüpotenuusi ruudust?

Ülesanne 14.18 (Piirkonnavoor 2010, 10. klass) Tõesta, et mis tahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{3}{2}xy\,.$$

Ülesanne 14.19 (Lõppvoor 2003, 10. klass) Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

Ülesanne 14.20 (Sügisene lahtine võistlus 2000, vanem rühm) Leia suurim reaalarv K, millel on järgmine omadus: mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c korral, mis rahuldavad võrratust $a+b+c \leqslant K$, kehtib ka võrratus $abc \leqslant K$.

Ülesanne 14.21 (Piirkonnavoor 2010, 11. klass) Olgu x ja y sellised positiivsed reaalarvud, et $x+y=1$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{y^2}-1\right) \geqslant 9\,.$$

Ülesanne 14.22 (Lõppvoor 2003, 11. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

Millal kehtib siin võrdus?

Ülesanne 14.23 (Talvine lahtine võistlus 2016, vanem rühm) Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x+7y+14z=252 \\ \qquad xyz-u^2=2016 \end{cases}$$

kõik mittenegatiivsed reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 14.24 (Sügisene lahtine võistlus 2011, vanem rühm) Olgu antud mittenegatiivne reaalarv a ja mittenegatiivne täisarv n. Tõesta võrratus

$$(n+1)a \leqslant n+a^{n+1}\,.$$

Ülesanne 14.25 (Sügisene lahtine võistlus 2001, vanem rühm) Olgu $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivsed reaalarvud ning $b_1, b_2, \dots, b_n$ samad arvud mingil viisil ümberjärjestatult. Tõesta, et

a) $\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\cdot\left(a_2+\frac{1}{b_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right) \geqslant 2^n$;

b) kui ülaltoodud võrratuses kehtib võrdus ning n on paaritu arv, siis vähemalt üks arvudest a_i on võrdne 1-ga.

Ülesanne 14.26 (Lõppvoor 1996, 12. klass) Milliste positiivsete reaalarvude x korral on avaldisel

$$x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^6+\frac{1996}{x}$$

vähim väärtus?

Lahendused

14.17 Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused a ja b. Kolmnurga pindala on siis $\frac{ab}{2}$, hüpotenuusi ruut aga Pythagorase teoreemi põhjal $c^2 = a^2 + b^2$. Niisiis tuleb tõestada võrratus

$$\frac{ab}{2} \leqslant \frac{a^2+b^2}{4},$$

mis on samaväärne tõese võrratusega $2ab \leqslant a^2 + b^2$ (vt harjutus 14.3). Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b$, st antud kolmnurk on võrdhaarne.

14.18 Vaatame kõigepealt läbi juhu, kui üks muutujatest on 0. Kui $x = 0$, saame võrratuse $y^2 \geqslant 0$. See võrratus on kindlasti tõene, kusjuures võrdus kehtib parajast siis kui $y = 0$. Täpselt samasuguse arutelu saame ka siis, kui alguses eeldame, et $y = 0$. Edasises võime seega vaadelda juhtu, kus $x, y \neq 0$.

Harjutusest 14.3 teame, et kõigi reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Kui x ja y on samamärgilised, saame $xy > 0$ ja järelikult $2xy > \frac{3}{2}xy$. Kui aga x ja y on erimärgilised, saame $x^2 + y^2 > 0 > \frac{3}{2}xy$. Mõlemal juhul ülesande võrratus kehtib, kusjuures juhul $x, y \neq 0$ võrdus kehtida ei saa.

14.19 Teisendame ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{abc}{4}.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

seega piisab tõestuse lõpetamiseks näidata $\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{abc}{4}$, mis on samaväärne võrratusega $4 \geqslant (abc)^{\frac{2}{3}}$. Kuna aga $a, b, c \leqslant 2$, siis ka $(abc)^{\frac{2}{3}} \leqslant 8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.27.

14.20 Otsitavaks arvuks on $K = 3\sqrt{3}$.

Kui $a + b + c \leqslant K$, siis aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \frac{K}{3},$$

millest $abc \leqslant \frac{K^3}{27}$. Kui lisaks kehtib $\frac{K^3}{27} \leqslant K$, saamegi järeldada võrratuse $abc \leqslant K$. Võrratus $\frac{K^3}{27} \leqslant K$ aga kehtib parajasti siis, kui $K^2 \leqslant 27$ ehk $K \leqslant 3\sqrt{3}$.

Teisest küljest, kui $K > 3\sqrt{3}$, saame valida $a = b = c = \frac{K}{3}$. Nii on eeldus $a + b + c \leqslant K$ täidetud, kuid

$$abc = \frac{K^3}{27} = K \cdot \frac{K^2}{27} > K.$$

Järelikult ükski arvust $3\sqrt{3}$ suurem arv ei sobi ülesande lahendiks.

14.21 Korrutame võrratuse mõlemaid pooli positiivse suurusega x^2y^2 ning avame sulud, misjärel saame tõestatavaga samaväärse võrratuse.

$$\begin{aligned}(1-x^2)(1-y^2) &\geqslant 9x^2y^2\,,\\ 1-x^2-y^2+x^2y^2 &\geqslant 9x^2y^2\,,\\ 1-x^2-y^2 &\geqslant 8x^2y^2\,.\end{aligned}$$

Asendame

$$1-x^2-y^2 = 1^2-x^2-y^2 = (x+y)^2-x^2-y^2 = 2xy\,,$$

niisiis jääb tõestada võrratus $2xy \geqslant 8x^2y^2$, mis on samaväärne võrratusega $\frac{1}{4} \geqslant xy$. See seos aga järeldub aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest, sest $\frac{1}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy$.

14.22 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest kolme positiivse arvu jaoks teame, et

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\,.$$

Järelikult saame

$$\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}} = 2\sqrt{3}\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a=b=c$ ja $\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ ehk $\sqrt[3]{a^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$. Viimane võrrand lihtsustub kujule $a = \frac{3}{a}$, kust saame ülesande võrdusejuhuks $a=b=c=\sqrt{3}$.

14.23 Vastus: $x=28$, $y=12$, $z=6$ ja $u=0$.

Rakendame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust ülesande süsteemi esimesele võrrandile:

$$252 = 3x+7y+14z \geqslant 3\sqrt[3]{3x\cdot 7y\cdot 14z} = \sqrt[3]{2\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot xyz}\,.$$

Süsteemi teisest võrrandist teame, et $xyz = 2016+u^2 \geqslant 2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$, niisiis saame võrratusega jätkata:

$$\sqrt[3]{2\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot xyz} \geqslant \sqrt[3]{2\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 2^5\cdot 3^2\cdot 7} = 2^2\cdot 3^2\cdot 7 = 252\,.$$

Niisiis peavad kõigis võrratustes tegelikult kehtima võrdused, st

$$3x = 7y = 14z, \quad u=0 \quad \text{ja} \quad xyz = 2016\,.$$

Järelikult

$$3x\cdot 7y\cdot 14z = 3\cdot 7\cdot 14\cdot 2016 = 2^6\cdot 3^3\cdot 7^3 = (2^2\cdot 3\cdot 7)^3 = 84^3\,,$$

millest saame

$$3x = 7y = 14z = 84$$

ehk $x=28$, $y=12$ ja $z=6$.

14.24 Juhul $n=0$ saame triviaalselt kehtiva võrratuse $a \leqslant a$. Juhul $n \geqslant 1$ saame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\frac{1+\ldots+1+a^{n+1}}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{1\cdot\ldots\cdot 1\cdot a^{n+1}},$$

mis on samaväärne tõestatava võrratusega.

14.25 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\cdot\left(a_2+\frac{1}{b_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\cdot 2\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} =$$
$$=2^n\sqrt{\frac{a_1 a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1 b_2\cdot\ldots\cdot b_n}} = 2^n\,.$$

Võrduse jaoks peab $a_i = \dfrac{1}{b_i}$ kehtima iga indeksi i korral. Ülesande tingimuste põhjal on ka b_i üks antud arvudest, st a_j mingi indeksi j korral. Siis aga ka $a_j = \dfrac{1}{b_j}$, kus b_j on omakorda mingi a_k. Kokkuvõttes saame

$$a_i = \frac{1}{b_i} = \frac{1}{a_j} = \frac{1}{1/b_j} = b_j = a_k\,.$$

See tähendab, et antud arvud jagunevad tsüklitesse, kus igas tsüklis esineb vaheldumisi mingi positiivne reaalarv ja tema pöördarv. Kui see reaalarv ei ole 1, peab tsükli pikkus olema paarisarv. Samas kui n on paaritu, ei saa kõik antud arvud paarisarvulise pikkusega tsüklisse jaguneda. Järelikult peab sel juhul leiduma a_i väärtusega 1.

Sellel ülesandel on veel mitu huvitavat lahendust, mida saab lugeda brošüüri [13] 5. peatükist.

14.26 Esitame $\dfrac{1996}{x}$ kui 1996 murru summa $\dfrac{1}{x}+\ldots+\dfrac{1}{x}$. Siis saame ülesande avaldist hinnata aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse abil kui

$$\frac{x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^6+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}{2000} \geqslant \sqrt[2000]{x^{1000}\cdot x^{900}\cdot x^{90}\cdot x^6\cdot\frac{1}{x}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x}} =$$
$$=1\,.$$

Järelikult

$$x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^6+\frac{1996}{x} \geqslant 2000\,,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x^{1000}=x^{900}=x^{90}=x^6=\dfrac{1}{x}$ ehk kui $x=1$.

14.3 Harmooniline keskmine ja ruutkeskmine

Definitsioon 14.2 Reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *harmooniliseks keskmiseks* nimetatakse suurust

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

ja *ruutkeskmiseks* suurust

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Selleks, et harmooniline keskmine oleks määratud, eeldame, et $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Osutub, et harmooniline keskmine pole kunagi suurem kui geomeetriline.

Teoreem 14.3 Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivsed reaalarvud. Siis kehtib võrratus

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Tõestus. Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust arvude $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ jaoks:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

Teoreemi võrratuse saame, kui leiame saadud võrratuse mõlemast poolest pöördväärtuse ja paneme tähele, et seejuures muutub võrratuse märk vastupidiseks. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$ ehk $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. □

Ka aritmeetilise ja ruutkeskmise vahel valitseb kindel võrratusseos.

Teoreem 14.4 Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suvalised reaalarvud. Siis kehtib võrratus

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n \geqslant 0$.

Tõestus. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on mittenegatiivsed. Sel juhul saame teoreemi võrratuse pooli ruutu tõstes samaväärse võrratuse

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n},$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 \leqslant n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

Kirjutame viimase võrratuse vasaku poole lahti:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = {} & x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+\\ & +2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+\ldots+2x_1x_n+\\ & +2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+2x_2x_n+\\ & \ldots\\ & +2x_{n-1}x_n.\end{aligned}$$

Niisiis tuleb tõestada võrratus

$$\begin{aligned}(n-1)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \geqslant\, & 2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+\ldots+2x_1x_n+\\ & +2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+2x_2x_n+\\ & \ldots\\ & +2x_{n-1}x_n\,.\end{aligned}$$

See võrratus on aga samaväärne tõese võrratusega

$$\begin{aligned}0 \leqslant\, & (x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2\ldots+(x_1-x_n)^2+\\ & +(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+\ldots+(x_2-x_n)^2+\\ & \ldots\\ & +(x_{n-1}-x_n)^2\,,\end{aligned}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Kui mõned arvudest x_i on negatiivsed, saame ülaltõestatud tulemust lihtsasti laiendada:

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} < \frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{n} & \leqslant \sqrt{\frac{|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2}{n}} =\\ & = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\,.\end{aligned}$$

Muuhulgas näeme, et kui arvude x_i seas leidub negatiivseid, siis teoreemi võrratuses võrdus kehtida ei saa. □

Aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust saab tõestada ka Jenseni võrratuse abil, vt jaotist 16.4.

Teoreemidest 14.2, 14.3 ja 14.4 saame kokkuvõtliku järelduse.

Järeldus 14.1 Olgu antud positiivsete reaalarvude harmooniline keskmine HK, geomeetriline keskmine GK, aritmeetiline keskmine AK ja ruutkeskmine RK. Siis kehtivad võrratused

$$HK \leqslant GK \leqslant AK \leqslant RK\,.$$

Ülesanded

Ülesanne 14.27 (Lõppvoor 2003, 10. klass) Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

Ülesanne 14.28 (Sügisene lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Kas leiduvad sellised arvud a, b, c, mis rahuldavad võrrandit

$$2a(c-a)-b(2a+b)+c(2b-c)=2020\,?$$

Ülesanne 14.29 (Lõppvoor 2004, 12. klass) Olgu a, b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant 1\,.$$

Ülesanne 14.30 (Talvine lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x, y, z korral

$$\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z \geqslant \frac{9y^2 z}{x + y^2 + z}\,.$$

Ülesanne 14.31 (Sügisene lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Olgu n ja k positiivsed täisarvud, mille korral $k \leqslant n$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant \frac{2(n-k+1)}{n+k}\,.$$

Vaata ka ülesannet 37.26.

Lahendused

14.27 Teisendame ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$\frac{3}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} \leqslant 4\,.$$

Selle võrratuse vasakus pooles tunneme ära harmoonilise keskmise avaldise. Kasutame harmoonilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust ning eeldust $a, b, c \leqslant 2$:

$$\frac{3}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} \leqslant \sqrt[3]{bc \cdot ac \cdot ab} \leqslant \sqrt[3]{64} = 4\,.$$

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.19.

14.28 Teisendame ülesande avaldist:

$$\begin{aligned} 2ac - 2a^2 - 2ab - b^2 + 2bc - c^2 &= -(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2ac + a^2) + 2ab = \\ &= -(a+b)^2 - (c-a)^2 + 2bc\,. \end{aligned}$$

Ruut- ja aritmeetilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (c-a)^2}{2}} \geqslant \frac{(a+b) + (c-a)}{2} = \frac{b+c}{2}\,,$$

järelikult

$$(a+b)^2 + (c-a)^2 \geqslant \frac{(b+c)^2}{2}\,.$$

Lisaks näeme, et kehtib ka võratus $\frac{(b+c)^2}{2} \geqslant 2bc$, sest ta on samaväärne võrratustega

$$\begin{aligned} b^2 + 2bc + c^2 &\geqslant 4bc\,, \\ b^2 - 2bc + c^2 &\geqslant 0\,, \\ (b-c)^2 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $(a+b)^2+(c-a)^2 \geqslant 2bc$, millest omakorda järeldub võrratus $-(a+b)^2-(c-a)^2+2bc \leqslant 0$. Seega ei saa ülesande avaldise väärtus olla 2020.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.13.

14.29 Kasutame harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelist võrratust (vaata järeldust 14.1):

$$\frac{3}{\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}} \leqslant \frac{1+2ab+1+2bc+1+2ca}{3} = \frac{3+2ab+2bc+2ca}{3} = \\ = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a^2+b^2+c^2},$$

niisiis

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}.$$

Ülesande lahendamiseks piisab, kui näitame, et selle võrratuse parem pool on vähemalt 1. See väide on vamaväärne võrratustega

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

Viimane võrratus aga kehtib tänu harjutuse 14.1 tulemusele.

14.30 Harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{3y^2z}{x+y^2+z} = \frac{3}{\frac{x}{y^2z}+\frac{y^2}{y^2z}+\frac{z}{y^2z}} \leqslant \frac{\frac{y^2z}{x}+\frac{y^2z}{y^2}+\frac{y^2z}{z}}{3} = \frac{\frac{y^2z}{x}+z+y^2}{3},$$

millest järeldubki ülesande võrratus.

14.31 Paneme tähele, et ülesande summas on $n-k+1$ liiget. Kasutame harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelist võrratust ning aritmeetilise jada summa valemit:

$$\frac{n-k+1}{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{k+(k+1)+\ldots+n}{n-k+1} = \frac{(n+k)(n-k+1)}{2(n-k+1)} = \frac{n+k}{2}.$$

Siit järeldubki ülesande võrratus.