14. Cauchy(-Bunjakovski-Schwarzi) võrratus

Cauchy võrratus (mida tuntakse ka Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi[1] võrratusena) ei esine Eesti matemaatikaolümpiaadidel väga sageli, kuid tema tundmine aitab mõnedele ülesannetele lihtsamaid lahendusi leida. Samuti kuulub Cauchy võrratus kindlalt rahvusvaheliste olümpiaadide "õppekavasse".

Sõnastame ja tõestame kõigepealt selle võrratuse lihtsama kuju.

Teoreem 14.1 Suvaliste reaalarvude a_1, a_2, b_1, b_2 korral kehtib võrratus

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) on samasihilised (või kui üks neist on nullvektor).

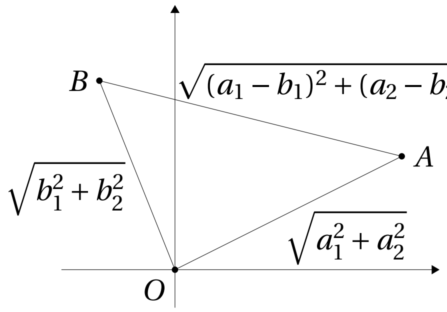
Tõestus. Kui $(a_1, a_2) = (0,0)$ või $(b_1, b_2) = (0,0)$, siis on võrratuse mõlemad pooled võrdsed nulliga ja võrratus kehtib. Järgnevas eeldame, et (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) pole nullvektorid.

Paneme tähele, et avaldised $(a_1^2 + a_2^2)$ ja $(b_1^2 + b_2^2)$ on vektorite (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) pikkuste ruudud. Selle asjaolu ärakasutamiseks vaatleme tasandil punkte $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ ja $O(0,0)$. Siis $|OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|OB| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ ja $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, vt joonist 14.1.

Kuna $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ pole nullvektorid, on $\angle AOB$ üheselt määratud. Kasutame koosinusteoreemi:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos(\angle AOB) \,.$$

[1] Võrratuse avaldas esmakordselt prantsuse matemaatik Augustin-Louis Cauchy [koš'i:] aastal 1821. Selle üldistustega tegelesid hiljem vene matemaatik Viktor Bunjakovski ja saksa matemaatik Hermann Schwarz.



Joonis 14.1

Teisendame seda võrdust:

$$\begin{aligned}
2\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\cos(\angle AOB) &= |OA|^2+|OB|^2-|AB|^2\,,\\
2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos(\angle AOB) &= a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\,,\\
2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos(\angle AOB) &= 2a_1b_1+2a_2b_2\,,\\
\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos(\angle AOB) &= a_1b_1+a_2b_2\,,\\
(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\cos^2(\angle AOB) &= (a_1b_1+a_2b_2)^2\,.
\end{aligned}$$

Kuna $\cos^2(\angle AOB)\leqslant 1$, siis järelikult

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2\,,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Võrdus kehtib parajasti siis kui $\cos(\angle AOB)=\pm1$, ehk $\angle AOB=0^\circ$ või $\angle AOB=180^\circ$, st kui punktid O, A ja B asuvad ühel sirgel ehk vektorid $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ on samasihilised (kuid võivad olla vastassuunalised!). □

Teoreemi 14.1 tõestuse saab lihtsalt üldistada ka kolmemõõtmelistele vektoritele. Edasi aga läheb raskeks, sest nelja- ja enamamõõtmeliste vektorite vahelist nurka on raske ette kujutada, rääkimata siis veel selle nurga koosinuse arvutamisest. Üldistus kõrgemamõõtmelistele vektoritele siiski kehtib, lihtsalt tõestusmeetod tuleb valida teistsugune.

Teoreem 14.2 Olgu antud naturaalarv $n\geqslant 2$. Suvaliste reaalarvude $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ja $b_1,b_2,\ldots,b_n$ korral kehtib võrratus

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ja $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ on samasihilised (või kui üks neist on nullvektor). Teisisõnu, võrdus kehtib parajasti siis, kui leidub selline reaalarv c, et $b_i=c\cdot a_i$ iga indeksi i korral (või kui $a_i=0$ iga indeksi i korral).

Tõestus. Moodustame ruutpolünoomi

$$P(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2\,.$$

Avame sulud ja koondame sarnased liikmed:

$$P(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)\,.$$

Kuna $P(x)$ on defineertud kui ruutude summa, kehtib iga x korral $P(x) \geqslant 0$. Järelikult on tema diskriminant mittepositiivne, seega

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leqslant 0\,,$$

millest järeldubki tõestatav võrratus.

Võrdusejuhu saame siis, kui $P(x) = 0$, st kui leidub lahend x nii, et $a_i x = b_i$ iga indeksi i korral. (Lisaks kehtib võrdus triviaalsel juhul, kui $P(x)$ ei moodusta ruutpolünoomi, st $a_i = 0$ iga indeksi i korral.) □

Et Cauchy võrratus sisaldab suurusi $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ ja $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$, tuleb tema kasutamiseks sageli vaadelda ülesandes antud väärtuste ruutjuuri.

Ülesanne 14.1 Olgu $P(x)$ mittenegatiivsete kordajatega polünoom. Tõesta, et kõigi reaalarvude $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$P(x^2)P(y^2) \geqslant P(xy)^2\,.$$

Lahendus. Olgu $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$, kus $c_i \geqslant 0$ iga indeksi i jaoks. Siis

$$P(x^2) = c_0 + c_1x^2 + c_2x^4 + \ldots + c_nx^{2n}\,.$$

Et kasutada Cauchy võrratust, peaks see avaldis olema $a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2$ mingi vektori $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ jaoks. Loomulik on valida $a_i = \sqrt{c_i}x_i$ iga indeksi i korral, st $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (\sqrt{c_0}, \sqrt{c_1}x, \ldots, \sqrt{c_n}x^n)$. Sama moodi valime $(b_0, b_1, \ldots, b_n) = (\sqrt{c_0}, \sqrt{c_1}y, \ldots, \sqrt{c_n}y^n)$. Siis saame

$$\begin{aligned} P(x^2)P(y^2) &= (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant \\ &\geqslant (a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 = \\ &= (c_0 + c_1xy + \ldots + c_nx^ny^n)^2 = P(xy)^2\,. \end{aligned}$$

Ülesanded

Ülesanne 14.2 (Piirkonnavoor 2000, 10. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}\,.$$

Ülesanne 14.3 (2014 piirkonnavoor, 11. klass) Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leiduvad positiivsed reaalarvud $x_x, x_2, \ldots, x_n$ nii, et

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2014 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 2014\,.$$

Ülesanne 14.4 (Sügisene lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Olgu n ja k positiivsed täisarvud, mille korral $k \leqslant n$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n} \geqslant \frac{2(n-k+1)}{n+k}.$$

Ülesanne 14.5 (Talvine lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x, y, z korral

$$\frac{y^2 z}{x}+y^2+z \geqslant \frac{9y^2 z}{x+y^2+z}.$$

Ülesanne 14.6 (Lõppvoor 1997, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2+y^2+1 > x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$$

Lahendused

14.2 Teoreemi 14.1 põhjal teame, et kehtib võrratus

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2).$$

Kuna eelduse põhjal on suurus $ab+cd$ positiivne (nagu muidugi ka a^2+c^2 ja b^2+d^2), võib võrratuse mõlemast poolest ruutjuure võtta ja võrratus jääb kehtima.

14.3 Vektorite $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ jaoks saame Cauchy võrratusest

$$((\sqrt{x_1})^2+\ldots+(\sqrt{x_n})^2)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\sqrt{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\ldots+\sqrt{x_n}\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2$$

ehk

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Ülesande tingimuste põhjal saame siis $2014^2 \geqslant n^2$ ehk $2014 \geqslant n$.

Juhul $n=1$ lahendit ilmselt ei leidu. Näitamaks, et $n \geqslant 2$ puhul saab sobiva konstruktsiooni anda, paneme kõigepealt tähele, et võrrandil $x+\frac{1}{x}=a$ leidub positiivne lahend iga $a \geqslant 2$ korral. Tõepoolest, vastava ruutvõrrandi $x^2-ax+1=0$ diskriminant a^2-4 on tänu tingimusele $a \geqslant 2$ mittenegatiivne. Võrrandi $x+\frac{1}{x}=a$ lahendi positiivsus on samuti ilmne, sest muuhulgas $a>0$.

Olgu siis $2 \leqslant n \leqslant 2014$. Valime $a=2014-(n-2)$; kuna $n \leqslant 2014$, siis $a \geqslant 2$. Olgu x võrrandi $x+\frac{1}{x}=a$ lahend. Nüüd on näha, et otsitavaks vektoriks $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ saame valida $\left(x, \frac{1}{x}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-2}\right)$.

Niisiis sobivad vastuseks kõik täisarvud $n=2,3,\ldots,2014$.

14.4 Cauchy võrratusest vektorite $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ja $\left(\sqrt{k}, \sqrt{k+1}, \ldots, \sqrt{n}\right)$ jaoks saame

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2, \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \cdot \left((\sqrt{k})^2, (\sqrt{k+1})^2, \ldots, (\sqrt{n})^2\right) =$$
$$\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot (k + (k+1) + \ldots + n) \geqslant (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-k+1})^2 =$$
$$= (n-k+1)^2 .$$

Aritmeetilise jada summa valem annab

$$k + (k+1) + \ldots + n = \frac{k+n}{2} \cdot (n-k+1),$$

niisiis

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{k+n}{2} \cdot (n-k+1) \geqslant (n-k+1)^2 .$$

millest järeldubki vajalik võrratus.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.30.

14.5 Teisendame tõestatava võrratuse kujule

$$\left(\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z\right)(x + y^2 + z) \geqslant 9y^2 z .$$

Näeme, et vasakule poolele saab rakendada Cauchy võrratust, valides $(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{\frac{y^2 z}{x}}, \sqrt{y^2}, \sqrt{z}\right)$ ja $(b_1, b_2, b_3) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y^2}, \sqrt{z}\right)$:

$$\left(\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z\right)(x + y^2 + z) \geqslant \left(\sqrt{\frac{y^2 z}{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y^2} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{z}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{y^2 z} + y^2 + z\right)^2 .$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{\sqrt{y^2 z} + y^2 + z}{3} \geqslant \sqrt[3]{\sqrt{y^2 z} \cdot y^2 \cdot z} = \sqrt{y^2 z},$$

niisiis

$$\left(\sqrt{y^2 z} + y^2 + z\right)^2 \geqslant \left(3\sqrt{y^2 z}\right)^2 = 9y^2 z,$$

kust järeldubki vajalik võrratus.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.29

14.6 Paneme tähele, et piisab, kui tõestame võrratuse mittenegatiivsete x ja y jaoks. Tõepoolest, kui asendada mittenegatiivne x või y väärtus tema vastandarvuga, saab võrratuse parem pool ainult väiksemaks minna.

Caychy võrratusest teame, et iga x ja y korral kehtib

$$(x^2+y^2)\left(\left(\sqrt{y^2+1}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\right)\geqslant\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2,$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+2)\geqslant\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2.$$

Eelduse põhjal on kõik avaldistes esinevad väärtused mittenegatiivsed, järelikult võime võrratuse mõlemast poolest ruutjuure võtta:

$$\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+2)}\geqslant x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+2)}\leqslant\frac{(x^2+y^2)+(x^2+y^2+2)}{2}=x^2+y^2+1.$$

Võrdus saaks kehtida ainult siis, kui $x^2+y^2=x^2+y^2+2$, mis on aga võimatu. Järelikult kehtib tegelikult range võrratus.