

# 13. Põhivõrratused

Selles jaotises käsitleme põhjalikumalt vaid paari olulisemat võrratust. Võrratuste maailm on muidugi palju rikkalikum ja rahvusvahelisteks olümpiaadideks valmistujatel soovitan lisa otsida brošüürist [13].

## 13.1 Kuidas ei tohi võrratusi tõestada

Võrratusülesannete lahendamisel tehakse sageli tüüpilist loogikaviga, millest tuleb hoiduma õppida.

■ **Näide 13.1** Olgu meie eesmärk tõestada kõigi reaalarvude  $x$  jaoks võrratus

$$-x^4 + x^2 + 2x \geq -2x^2. \quad (13.1)$$

Paneme tähele, et iga reaalarvu  $x$  korral kehtib  $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ , millest saame  $x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$  ehk  $x^4 + 1 \geq 2x^2$ . Liidame selle võrratuse tõestatavale võrratusele (13.1) ja saame

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0,$$

mis on samaväärne tõese võrratusega  $(x + 1)^2 \geq 0$ . ■

Kas see arutelu kujutab endast võrratuse (13.1) korrektset tõestust? Ei, ta ei saa seda olla, sest näiteks juhul  $x = 3$  saame võrratusse (13.1) asendades

$$-81 + 9 + 6 \geq -2 \cdot 9$$

ehk  $-66 \geq -18$ , mis ei kehti. Niisiis õnnestus meil edukalt “tõestada” vale võrratus! Kuidasmoodi?

Viga peitub arutluse loogikas. Me *alustasime* tõestatavast võrratusest ja *järeldasime* sellest tõese väite, kuigi tegelikult oleks vaja just vastupidi – tõestatav väide peaks ilmuma arutelu lõpus, järeldusena.

Probleem seisneb selles, et ka väärast väitest saab järeldada tõest. Seega ei tähenda arutluse lõpus tõese võrratuseni jõudmine automaatselt seda, et algne võrratus tingimata kehtiks. Näites 13.1 liitsime omavahel väära ja tõese võrratuse ning tulemus osutus samuti tõeseks.

Tõestatava võrratuse teisendamine tõestuse otsimise käigus pole iseenesest muidugi keelatud võtte, aga seejuures tuleb tähele panna, et kõik kasutatavad teisendused säilitaksid saadavate võrratuste samaväärsuse algse võrratusega. Niisugusteks teisendusteks on näiteks võrratuse mõlemale poolele sama suuruse liitmine-lahutamine ja võrratuse mõlema poole korrutamine-jagamine sama positiivse suurusega.

Ohtlikud operatsioonid, mis võivad väära võrratuse tõeseks muuta, on näiteks võrratuste omavahel liitmine ja korrutamine. Korrutamise üheks erijuhuks on võrratuse poolte ruutu tõstmine, millega tuleb samuti ettevaatlik olla. Nii näiteks saame väärast võrratusest  $-3 > 2$  pooli ruutu tõstes tõese võrratuse  $9 > 4$ . Võrratust  $a > b$  (või  $a \geq b$ ) tohib teisendamise käigus ruutu tõsta ainult siis, kui me võime kindlad olla, et  $a, b \geq 0$ . Sel juhul saame võrratuse  $a^2 > b^2$  mõlemast poolest ruutjuurt võttes võrratusele  $a > b$  tagasi minna.

Üldine põhimõte ongi see, et pärast tõestatava võrratuse teisendamist ilmselt tõeseks võrratuseks peame üle kontrollima, et kogu arutelu on pööratav. Olümpiaadiülesande lahenduses tuleb arutelu pööratavus ilmutatult ära mainida, näiteks sõnastuses “Teisendame antud võrratuse samaväärsele kujule”. Selle lause kirjutamata jätmisel arvab hindaja, et lahendaja on teinud näitega 13.1 sarnase loogikavea ja muidu täiesti korrektne lahendus võib saada 0 punkti!

## 13.2 Reaalarvu ruut on mittenegatiivne

Võrratus

$$x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

on üks lihtsamaid ja kõige sagedamini kasutatavaid võrratusi võistlusmatemaatikas. Tema kasutamiseks tuleb uuritav avaldis teisendada täisruuduks või täisruutude summaks, millest saame kohe järeldada avaldise mittenegatiivsuse. Võrdus nulliga kehtib parajasti siis, kui ruutu tõstetav(ad) avaldis(ed) on ise võrdne (võrdsed) nulliga. Raske koht on seejuures enamasti vajaliku teisenduse leidmine.

**Harjutus 13.1** Tõesta, et suvaliste reaalarvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  korral kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Millal kehtib võrdus?

*Lahendus.* Korrutame võrratuse mõlemaid pooli 2-ga ja viime kõik liikmed ühele poolele. Saame tõestatava võrratusega samaväärse võrratuse

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0,$$

mille teiseneb rühmitades kujule

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

See võrratus aga kehtib, sest tema vasak pool on kolme reaalarvu ruudu summa. Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $a = b = c$ .

**Ülesanne 13.1** (Piirkonnavoor 2013, 9. klass) Reaalarvud  $x$ ,  $y$  ja  $r$  rahuldavad tingimust

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + r.$$

Tõesta, et  $r \geq -2$ .

*Lahendus.* Viime muutujaid  $x$  ja  $y$  sisaldavad liikmed võrduse samale poolele ja saame

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = r.$$

Avaldised  $x^2 - 2x$  ja  $y^2 - 2y$  on peaaegu kaksliikmete  $x - 1$  ja  $y - 1$  ruudud, kui mõlemale lisada 1. Sellepärast liidame võrduse mõlemale poole veel 2 ja saame

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= r + 2, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= r + 2. \end{aligned}$$

Kuna võrduse vasak pool on ruutude summana mittenegatiivne, peab kehtima võrratus  $r + 2 \geq 0$ , millest järeldubki  $r \geq -2$ .

Vahel võib võrratustest olla kasu ka võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamisel, kui õnnestub näidata, et vaadeldavad võrrandid kirjeldavad teatud võrratuse võrdusejuhtu.

**Ülesanne 13.2** (Piirkonnavoor 2021, 10. klass) Leia kõik reaalarvude kolmikud  $(x, y, z)$ , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2 \\ yz + x^2 = y^2 + z^2 \\ zx + y^2 = z^2 + x^2 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

*Lahendus.* Vastus:  $x = y = z = 1$ .

Liites süsteemi kolm esimest võrrandit ja koondades sarnased liikmed saame võrduse

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2.$$

Harjutusest 13.1 teame, et alati  $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$ , kusjuures võrdus kehtib ainult siis, kui  $x = y = z$ . Nüüd saame süsteemi viimasest võrrandist, et  $x^3 = 1$ , millest omakorda järeldubki, et  $x = 1$ .

## Ülesanded

**Ülesanne 13.3** (Lõppvoor 1993, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvuliste  $x$  ja  $y$  väärtuste korral kehtib võrratus

$$x(5x + 2) + y(4x + y) + 5 > 0.$$

**Ülesanne 13.4** (Lõppvoor 1995, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvu  $x \geq 0$  korral kehtib võrratus

$$\sqrt{15}(4 + \sqrt{7x}) \leq 9\sqrt{4 + 5x}.$$

**Ülesanne 13.5** (Piirkonnavoor 1993, 11. klass) Olgu  $x, y$  positiivsed arvud ja  $x + y = 1$ . Tõesta, et

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

**Ülesanne 13.6** (Piirkonnavoor 2018, 11. klass) Tõesta, et kõigi reaalarvude  $x, y$  ja  $z$  korral kehtib võrratus

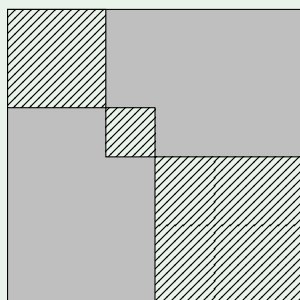
$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2y(x + z).$$

**Ülesanne 13.7** (Piirkonnavoor 1995, 12. klass) Näita, et võrrandil  $x^2 - 3x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$  puuduvad reaalarvulised lahendid.

**Ülesanne 13.8** (Lõppvoor 2018, 10. klass) Tõesta, et kõigi reaalarvude  $x, y, z$  korral

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4(xy + yz + zx).$$

**Ülesanne 13.9** (Sügisene lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Ruudukujulisel maatükil on kolm erineva suurusega ruudukujulise põhiplaaniga kaubanduskeskust, mis on paigutatud joonisel näidatud viisil (tähistatud viirutatult, mõõtmeid pole teada). Iga kaubanduskeskuse all on kahekorruseline siseparkla ning kaubanduskeskuste kõrval asub kaks ühekorruselist avaparklat (tähistatud halliga). Kumba liiki parklates on rohkem parkimispinda?



**Ülesanne 13.10** (Sügisene lahtine võistlus 2015, noorem rühm) Tõesta, et mistahes erinevate reaalarvude  $a, b$  ja  $c$  korral on vähemalt üks arvudest  $(a + b + c)^2 - 8bc$ ,  $(a + b + c)^2 - 8ca$  ja  $(a + b + c)^2 - 8ab$  positiivne.

**Ülesanne 13.11** (Piirkonnavoor 2000, 10. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude  $a, b, c, d$  korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}.$$

**Ülesanne 13.12** (Lõppvoor 2000, 10. klass) Tõesta, et kui arvud  $a, b, c, d$  rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2cd \\ b^2 + c^2 = 2da \\ c^2 + d^2 = 2ab \end{cases},$$

siis  $a = b = c = d$ .

**Ülesanne 13.13** (Sügisene lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Kas leiduvad sellised arvud  $a, b, c$ , mis rahuldavad võrrandit

$$2a(c - a) - b(2a + b) + c(2b - c) = 2020?$$

**Ülesanne 13.14** (Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Kas leiduvad reaalarvud  $x, y, z, t$ , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 1 + x^3 + y^2 = 0, \\ 1 + y^3 + z^2 = 0, \\ 1 + z^3 + t^2 = 0, \\ 1 + t^3 + x^2 = 0, \\ x + y + z + t = 0? \end{cases}$$

**Ülesanne 13.15** (Lõppvoor 2001, 11. klass) Olgu  $x$  ja  $y$  sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et  $x + y = 2$ . Tõesta, et

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2.$$

**Ülesanne 13.16** (Lõppvoor 2008, 11. klass) Tõesta, et suvaliste reaalarvude  $a, b$  ja  $c$  korral kehtib võrratus

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 3ab + 4bc + 2ca.$$

Millal kehtib võrdus?

## Lahendused

13.3 Teisendame ülesande avaldist, eraldades täisruudud:

$$\begin{aligned} x(5x + 2) + y(4x + y) + 5 &= 5x^2 + 2x + 4xy + y^2 + 5 = \\ &= x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4xy + y^2 + 4 = \\ &= (x + 1)^2 + (2x + y)^2 + 4. \end{aligned}$$

Kahe täisruudu ja ühe positiivse arvu summa peab kokkuvõttes olema positiivne.

13.4 Võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, niisiis jääb võrratus ruutu tõstes algsega samaväärseks:

$$\begin{aligned} 15 \cdot (16 + 8\sqrt{7x} + 7x) &\leq 81 \cdot (4 + 5x), \\ 240 + 120\sqrt{7x} + 105x &\leq 324 + 405x, \\ 0 &\leq 84 - 120\sqrt{7x} + 300x, \\ 0 &\leq 28 - 40\sqrt{7x} + 100x, \\ 0 &\leq (2\sqrt{7} - 10\sqrt{x})^2. \end{aligned}$$

Viimane võrratus kehtib, sest tema paremal pool on reaalarvulise avaldise ruut.

Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $2\sqrt{7} = 10\sqrt{x}$  ehk  $x = \frac{7}{25}$ .

13.5 Kuna  $x$  ja  $y$  on positiivsed, säilitavad järgmised teisendused võrratuse samaväärsuse:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) &\geq 9, \\ \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} &\geq 9, \\ xy + x + y + 1 &\geq 9xy. \end{aligned}$$

Arvestades lisaks, et  $x + y = 1$ , saame teisendamist jätkata:

$$\begin{aligned} 2 - 8x(1 - x) &\geq 0, \\ 2(1 - 4x + 4x^2) &\geq 0, \\ 2(1 - 2x)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Viimane võrratus on ülesande võrratusega samaväärne, aga samas ka ilmselt kehtiv, sest suvalise reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

13.6 Sulge lahti korrutades ja kõiki liikmeid ühele poole viies saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz \geq 0.$$

Saadud avaldis on ebasümmeetriline:  $y^2$  kordaja on 1, teistel liikmetel aga 2 või  $-2$ . Kui lisaks püüda esitada seda avaldist kahe kaksliikme ruudu summana, oleks tulemuseks 6 liidetavat, meil aga on ainult 5. Kas mõned sarnased liikmed on koondatud üheks? Kui jah, siis tuleks püüda saadud avaldises mõnda liiget kaheks jagada. Aga millist? Selgub, et sihile viib  $y^2$  pooleksjagamine!

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz &= 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz = \\ &= 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2 - 2yz + \frac{1}{2}y^2 = \\ &= \left(\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}z - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Oleme uuritava avaldise teisendanud kahe reaalarvu ruudu summaks, mis on mittenegatiivne.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on tunda ära sarnasus avaldisega  $(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$ . Uurime, mis liikmed üle jäävad, ja näeme, et

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz = (x - y + z)^2 + x^2 + z^2 - 2xz = (x - y + z)^2 + (x - z)^2.$$

Oleme jällegi teisendanud vajaliku avaldise kahe ruudu summaks.

13.7 Ülesande avaldises tuleb ära tunda kahe ruudu summa:

$$x^2 - 3x - 2\sqrt{x} + 5 = x^2 - 4x + 4 + x - 2\sqrt{x} + 1 = (x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2.$$

See avaldis on kindlasti mittenegatiivne, kusjuures null saab ta olla ainult siis, kui  $x = 2$  ja  $x = 1$ ; see aga pole võimalik. Niisiis peab ülesande avaldis olema iga reaalarvu  $x$  korral rangelt positiivne, mistõttu vaadeldaval võrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad.



13.8 Harjutuse 13.1 põhjal teame, et

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Kuna lisaks  $x^2, y^2, z^2 \geq 0$ , saame kokkuvõttes

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4(xy + yz + zx).$$

Teise võimaliku lahenduse saame, kui viime ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4zx \geq 0$$

ja paneme tähele, et selle võrratuse vasakul poolel saab liikmeid grupeerida, mis annab järgmised samaväärsed võrratused:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (z^2 - 4zx + 4x^2) \geq 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 2x)^2 \geq 0.$$

Viimne võrratus aga kehtib, sest tema vasakul poolel on ruutude summa.

13.9 Vastus: kaubanduskeskuste all on rohkem parkimispinda.

Tähistame kaubanduskeskuste küljepikkused vastavalt  $a, b$  ja  $c$ ; siis nende all on parkimispinda kokku  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ . Avaparklate kogupindala on aga

$$(a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Võrratuse

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

tõestasime harjutuses 13.1. Võrdusejuht  $a = b = c$  ei saa praegu kehtida, sest ülesande tingimuste kohaselt on kaubanduskeskused erineva suurusega.

13.10 Oletame vastuväiteliselt, et kõik kolm arvu on mittepositiivsed. Avades sulud ja liites kolm saadavat avaldist, on tulemuseks

$$3a^2 + 3b^3 + 3c^3 - 2ab - 2bc - 2ca.$$

Paneme tähele, et viimase avaldise saav teisendada ruutude summaks kujul

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2,$$

mis peab järelikult olema mittenegatiivne. Kuna see avaldis on teisest küljest saadud mittepositiivsete väärtuste summana, on ainus võimalus, et tema enda väärtus on 0. See saab nii olla aga ainult siis, kui

$$a = b = c = a - b = b - c = c - a = 0;$$

vastuolu tingimusega, et arvud  $a, b$  ja  $c$  on erinevad.

13.11 Kuna kõik ülesandes esinevad suurused on positiivsed, saame tõestatava võrratuse mõlemaid pooli ruutu tõstes temaga samaväärse võrratuse. Teisendame võrratust nii, et iga samm säilitab samaväärsuse:

$$\begin{aligned} (ab + cd)^2 &\leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2), \\ a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 &\leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2, \\ 2abcd &\leq a^2d^2 + c^2b^2, \\ 0 &\leq (ad - cb)^2. \end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

Nõutud võrratus saab tõestada ka Cauchy võrratuse abil, vt ülesannet 14.2.

13.12 Süsteemi esimese ja kolmanda võrrandi liitmisel saame

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2cd + 2ab, \\a^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2cd + d^2 &= 0, \\(a - b)^2 + (c - d)^2 &= 0,\end{aligned}$$

Järelikult  $(a - b)^2 = 0$  ja  $(c - d)^2 = 0$ , mistõttu  $a = b$  ja  $c = d$ . Süsteemi teise võrrandisse asendades saame nüüd

$$\begin{aligned}a^2 + c^2 &= 2ca, \\a^2 - 2ac + c^2 &= 0, \\(a - c)^2 &= 0,\end{aligned}$$

niisiis kehtib ka võrdus  $a = c$ .

13.13 Vastus: ei.

Ülesande avaldise vasakut poolt lahti korrutades saame

$$2ac - 2a^2 - 2ab - b^2 + 2bc - c^2.$$

Siin tuleb ära tunda kolmliikme ruudu valem. Täpsemalt paneme tähele, et

$$2ac - a^2 - 2ab - b^2 + 2bc - c^2 = -(-a - b + c)^2.$$

Üks  $-a^2$  jääb veel üle, niisiis kokkuvõtteks

$$2a(c - a) - b(2a + b) + c(2b - c) = -(-a - b + c)^2 - a^2.$$

Kuna  $(-a - b + c)^2 \geq 0$  ja  $a^2 \geq 0$ , saame, et ülesande võrrandi vasaku poole avaldis peab olema mittepositiivne ega või järelikult mingite reaalarvude  $a, b, c$  korral omandada väärtust 2020.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.27.

13.14 Vastus: ei.

Esimesest võrrandist saame  $x^3 = -y^2 - 1 < 0$ , järelikult ka  $x < 0$ . Sama moodi näitame järgmiste võrrandite põhjal, et  $y < 0$ ,  $z < 0$  ja  $t < 0$ . Saadud võrratuste liitmisel saame  $x + y + z + t < 0$ , mis on vastuolus süsteemi viimase võrrandiga.

13.15 Kuna  $x, y \geq 0$  ning  $x + y = 2$ , leidub  $t \in [-1, 1]$  nii, et  $x = 1 - t$  ja  $y = 1 + t$ . Teeme asenduse ülesande avaldisse:

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) = (1 - t)^2 (1 + t)^2 ((1 - t)^2 + (1 + t)^2) = (1 - t^2)^2 (2 + 2t^2).$$

Nüüd saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule:

$$\begin{aligned}(1 - t^2)^2 (2 + 2t^2) &\leq 2, \\(1 - t^2)(1 - t^2)(1 + t^2) &\leq 1, \\(1 - t^2)(1 - t^4) &\leq 1.\end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest  $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$  ja  $0 \leq 1 - t^4 \leq 1$ .



## 13.16 Teisendame ülesande võrratuse kujule

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca \geq 0$$

ning püüame vasakut poolt esitada täisruutude summana. Aga kuidas täpselt? See polegi nii ilmne. Näiteks kui me üritaksime kasutada võrratust  $(a - c)^2 \geq 0$  ehk  $a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$ , tuleks lisaks tõestada, et  $4b^2 + 7c^2 - 3ab - 4bc \geq 0$ . See võrratus pole aga üldjuhul õige, sest muutuja  $a$  esineb vasakul poolel ainult ühe korra ja miinusmärgiga. Nii võime selle võrratuse ümberlökkamiseks valida  $a$ , mis on  $b$  ja  $c$ -ga võrreldes suur. Näiteks  $a = 10, b = 1$  ja  $c = 0$  korral jääks võrratus kujule  $4 - 30 \geq 0$ , mis ilmselt ei kehti.

Niisiis tuleb liikmeid kuidagi teisiti grupeerida.  $-2ca$  vahe ruudu valemi keskmise liikmena ei andnud esimesel katsel tulemust; samuti pole selge, mida hakata peale liikmega  $-3ab$ . Proovime siis, mida annab lähtumine liikmest  $-4bc$ .

On kaks lihtsat kaksliikme vahe ruutu, mille lahtikirjutamisel  $-4bc$  tekib:  $(2b - c)^2$  ja  $(b - 2c)^2$ . Esimene neist annab võrratuse  $4b^2 - 4bc + c^2 \geq 0$ . Ülesande võrratuse jaoks oleks vaja lisaks tõestada veel  $a^2 + 8c^2 - 3ab - 2ca \geq 0$ . Analoogiliselt ülaltehtuga näeme aga, et niisugune võrratus ei saa üldjuhul kehtida. Seekord on "halvaks" muutujaks  $b$ , mis suudab üksinda vasaku poole negatiivseks muuta; näiteks piisab valida  $a = 1, b = 10$  ja  $c = 0$ .

Uurime siis võrratust  $(b - 2c)^2 \geq 0$  ehk  $b^2 - 4bc + 4c^2 \geq 0$ . Peale selle oleks ülesande võrratuse saamiseks vaja lisaks tõestada

$$a^2 + 3b^2 + 4c^2 - 3ab - 2ca \geq 0.$$

Proovime nüüd grupeerida liikmeid  $4c^2$  ja  $-2ca$ . Neile oleks lisaks tarvis liiget  $a^2$  mingi kordajaga. Milline peaks olema kordaja  $x$  väärtus, et  $4c^2 - 2ac + xa^2$  osutuks kaksliikme vahe ruuduks? Muidugi  $x = \frac{1}{4}$ , sest siis  $4c^2 - 2ac + \frac{1}{4}a^2 = \left(2c - \frac{a}{2}\right)^2$ .

Tõestatavast võrratusest jäävad üle liikmed  $\frac{3}{4}a^2 - 3ab + 3b^2$ . Osutub, et ka see avaldis esitub täisruuduna:  $\frac{3}{4}a^2 - 3ab + 3b^2 = 3\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$ . Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca = 3\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + (b - 2c)^2 + \left(2c - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui

$$\frac{a}{2} = b, \quad b = 2c \quad \text{ja} \quad 2c = \frac{a}{2},$$

ehk siis, kui  $(a, b, c) = (4t, 2t, t)$  mingi reaalarvu  $t$  korral.

## 13.3 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

**Definitsioon 13.1** Reaal arvude  $x_1, x_2, \dots, x_n$  aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse suurust

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ja geomeetriliseks keskmiseks suurust

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Selleks, et geomeetiline keskmine oleks määratud, eeldatakse tavaliselt lisaks, et  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Kahe arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahel on järgmine oluline seos.

**Teoreem 13.1** Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude  $x$  ja  $y$  korral kehtib võrratus

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui  $x = y$ .

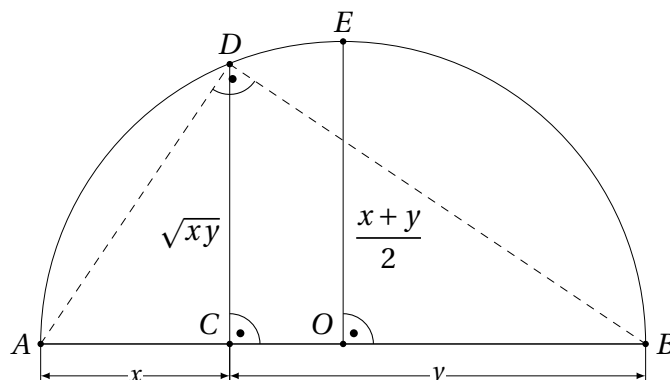
*Tõestus.* Teoreemi võrratus on samaväärne võrratustega

$$\begin{aligned} x + y &\geq 2\sqrt{xy}, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\geq 0, \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Viimane võrratus on aga tõene, sest iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne. Võrdus kehtib parajasti siis kui  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$  ehk  $x = y$ .  $\square$

Kui  $\frac{x+y}{2}$  arvutamise juures kasutame me tõepoolest aritmeetilisi operatsioone liitmist ja jagamist, siis mida geomeetrilist on suuruses  $\sqrt{xy}$ ? See tuleb välja teoreemi 13.1 teisest, geomeetrisest tõestusest.

*Tõestus.* Vaatleme lõiku  $AB$  pikkusega  $x + y$  ja joonestame talle kui diameetrile poolringjoone. Olgu  $C$  selle lõigu niisugune punkt, et  $|AC| = x$  (seega ka  $|CB| = y$ ), ning olgu  $O$  lõigu  $AB$  keskpunkt. Tõmbame lõigule  $AB$  punktides  $C$  ja  $O$  ristsirged ning lõikugu need poolringjoonega vastavalt punktides  $D$  ja  $E$ , vt joonist 13.1.



Joonis 13.1

Kuna  $OE$  on poolringjoone raadius, siis  $|OE| = \frac{|AB|}{2} = \frac{x+y}{2}$ .

Lõigu  $CD$  pikkuse arvutamiseks paneme kõigepealt tähele, et  $\triangle ADC \sim \triangle ABD$  tunnuse NN alusel, sest nurk tipu  $A$  juures on ühine ning  $\angle ACD = 90^\circ$  ja  $\angle ADB = 90^\circ$  kui diameetrile toetuv piirdenurk. Sama moodi näitame, et  $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ . Järelikult  $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ . Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, seega

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|CB|},$$

millest omakorda saame

$$|CD|^2 = |AC| \cdot |CB| = xy \quad \text{ehk} \quad |CD| = \sqrt{xy}.$$

Jooniselt 13.1 on ilmne, et  $|CD| \leq |OE|$ , kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui  $C$  on lõigu  $AB$  keskpunkt ehk  $x = y$ .  $\square$

Teoreemi 13.1 saab üldistada ka rohkema kui kahe väärtuse keskmistele.

**Teoreem 13.2** Olgu antud  $n \geq 2$  mittenegatiivset reaalarvu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Siis kehtib võrratus

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Tõestus.* Paneme kõigepealt tähele, et kui mõni  $x_i = 0$ , on tõestatava võrratuse parem pool samuti 0 ja võrratus kehtib. Järgnevas võime niisiis eeldada, et arvud  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on kõik positiivsed.

Teeme muutujavahetuse

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Tõestatav võrratus võtab siis kuju

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n. \quad (13.2)$$

Lisaks kehtib tänu muutujavahetusele

$$y_1 y_2 \dots y_n = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})^n} = 1.$$

Tõestame võrratuse (13.2) matemaatilise induktsiooni meetodil (vaata jaotist 1, et tuleb meelde, kuidas induktsioon täpselt töötab).

Induktsiooni baas  $n = 2$  koos võrdusejuhuga järeldub otse teoreemist 13.1:

$$y_1 + y_2 \geq 2\sqrt{y_1 y_2} = 2\sqrt{1} = 2.$$

Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et suvalise  $n$  positiivse arvu korral, mille korrutis on 1, võrratus (13.2) kehtib. Vaatleme nüüd suvalist  $n + 1$  positiivset arvu  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ , mille jaoks  $y_1 y_2 \dots y_{n+1} = 1$ .

Järjestame arvud  $y_i$  mittekahanevalt. Kuna nende korrutis on 1, siis saame  $y_1 \leq 1$  ja  $y_{n+1} \geq 1$ . Tähistame  $z = y_1 y_{n+1}$ . Et  $z y_2 \dots y_n = 1$ , kehtib arvude  $z, y_2, \dots, y_n$  jaoks induktsiooni eeldus. Järelikult kehtib ka võrratus

$$z + y_2 + \dots + y_n \geq n.$$

Kuna  $y_1 \leq 1$  ja  $y_{n+1} \geq 1$ , siis  $(1 - y_1)(y_{n+1} - 1) \geq 0$ , mis on samaväärne võrratustega  $y_1 + y_{n+1} - y_1 y_{n+1} - 1 \geq 0$  ja  $y_1 + y_{n+1} \geq y_1 y_{n+1} + 1 = z + 1$ . Kokkuvõttes saame

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} \geq z + 1 + y_2 + \dots + y_n \geq n + 1,$$

mis tõestab induktsiooni sammu väite.

Võrdus saab kehtida ainult siis, kui  $z = y_2 = \dots = y_n = 1$  ja lisaks  $y_1 + y_{n+1} = z + 1 = 2$ . Kuna  $y_1 y_{n+1} = z = 1$ , siis kehtib võrratuses  $\frac{y_1 + y_{n+1}}{2} \geq \sqrt{y_1 y_{n+1}} = 1$  tegelikult võrdus, mistõttu ka  $y_1 = y_{n+1} = 1$ .  $\square$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust saab tõestada ka Jenseni võrratuse abil, vt jaotist 15.4.

**Harjutus 13.2** Tõesta, et iga positiivse reaalarvu  $x$  korral kehtib võrratus

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Millal kehtib võrdus?

*Lahendus.* Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest arvude  $x$  ja  $\frac{1}{x}$  jaoks saame

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1,$$

järelikult  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ . Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x = \frac{1}{x}$  ehk  $x^2 = 1$  ehk  $x = 1$ .

**Harjutus 13.3** Tõesta, et kõigi reaalarvude  $x$  ja  $y$  korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis kui  $x = y$ .

*Lahendus.* Ülesande võrratus on samaväärne võrratusega  $(x - y)^2 \geq 0$ , mis kehtib kõigi reaalarvude korral. Võrdus kehtib parajasti siis kui  $x - y = 0$  ehk  $x = y$ .

## Ülesanded

**Ülesanne 13.17** (Piirkonnavor 2010, 10. klass) Tõesta, et mis tahes reaalarvude  $x$  ja  $y$  korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq \frac{3}{2}xy.$$

**Ülesanne 13.18** (Lõppvoor 2003, 10. klass) Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{4}{3}.$$

**Ülesanne 13.19** (Sügisene lahtine võistlus 2000, vanem rühm) Leia suurim reaalarv  $K$ , millel on järgmine omadus: mistahes positiivsete reaalarvude  $a, b, c$  korral, mis rahuldavad võrratust  $a + b + c \leq K$ , kehtib ka võrratus  $abc \leq K$ .

**Ülesanne 13.20** (Piirkonnavor 2010, 11. klass) Olgu  $x$  ja  $y$  sellised positiivsed reaalarvud, et  $x + y = 1$ . Tõesta, et kehtib võrratus

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9.$$

**Ülesanne 13.21** (Lõppvoor 2003, 11. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude  $a, b$  ja  $c$  korral kehtib võrratus

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Millal kehtib siin võrdus?

**Ülesanne 13.22** (Talvine lahtine võistlus 2016, vanem rühm) Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x + 7y + 14z = 252 \\ xyz - u^2 = 2016 \end{cases}$$

kõik mittenegatiivsed reaalarvulised lahendid.

**Ülesanne 13.23** (Sügisene lahtine võistlus 2011, vanem rühm) Olgu antud mittenegatiivne reaalarv  $a$  ja mittenegatiivne täisarv  $n$ . Tõesta võrratus

$$(n+1)a \leq n + a^{n+1}.$$

**Ülesanne 13.24** (Sügisene lahtine võistlus 2001, vanem rühm) Olgu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positiivsed reaalarvud ning  $b_1, b_2, \dots, b_n$  samad arvud mingil viisil ümberjärjestatult. Tõesta, et

a)  $\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{b_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) \geq 2^n;$

b) kui ülaltoodud võrratuses kehtib võrdus ning  $n$  on paaritu arv, siis vähemalt üks arvudest  $a_i$  on võrdne 1-ga.

**Ülesanne 13.25** (Lõppvoor 1996, 12. klass) Milliste positiivsete reaalarvude  $x$  korral on avaldisel

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1996}{x}$$

vähim väärtus?

## Lahendused

13.17 Vaatame kõigepealt läbi juhu, kui üks muutujatest on 0. Kui  $x = 0$ , saame võrratuse  $y^2 \geq 0$ . See võrratus on kindlasti tõene, kusjuures võrdus kehtib parajast siis kui  $y = 0$ . Täpselt samasuguse arutelu saame ka siis, kui alguses eeldame, et  $y = 0$ . Edasises võime seega vaadelda juhtu, kus  $x, y \neq 0$ .

Harjutusest 13.3 teame, et kõigi reaalarvude  $x$  ja  $y$  korral kehtib võrratus  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ . Kui  $x$  ja  $y$  on samamärgilised, saame  $xy > 0$  ja järelikult  $2xy > \frac{3}{2}xy$ .

Kui aga  $x$  ja  $y$  on erimärgilised, saame  $x^2 + y^2 > 0 > \frac{3}{2}xy$ . Mõlemal juhul ülesande võrratus kehtib, kusjuures juhul  $x, y \neq 0$  võrdus kehtida ei saa.

13.18 Teisendame ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{abc}{4}.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

seega piisab tõestuse lõpetamiseks näidata  $\sqrt[3]{abc} \geq \frac{abc}{4}$ , mis on samaväärne võrratusega  $4 \geq (abc)^{\frac{2}{3}}$ . Kuna aga  $a, b, c \leq 2$ , siis ka  $(abc)^{\frac{2}{3}} \leq 8^{\frac{2}{3}} = 4$ .

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.26.

13.19 Otsitavaks arvuks on  $K = 3\sqrt{3}$ .

Kui  $a + b + c \leq K$ , siis aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{K}{3},$$

millest  $abc \leq \frac{K^3}{27}$ . Kui lisaks kehtib  $\frac{K^3}{27} \leq K$ , saamegi järeldada võrratuse  $abc \leq K$ .

Võrratus  $\frac{K^3}{27} \leq K$  aga kehtib parajasti siis, kui  $K^2 \leq 27$  ehk  $K \leq 3\sqrt{3}$ .

Teisest küljest, kui  $K > 3\sqrt{3}$ , saame valida  $a = b = c = \frac{K}{3}$ . Nii on eeldus  $a + b + c \leq K$  täidetud, kuid

$$abc = \frac{K^3}{27} = K \cdot \frac{K^2}{27} > K.$$

Järelikult ükski arvust  $3\sqrt{3}$  suurem arv ei sobi ülesande lahendiks.

13.20 Korrutame võrratuse mõlemaid pooli positiivse suurusega  $x^2 y^2$  ning avame sulud, misjärel saame tõestatavaga samaväärse võrratuse.

$$\begin{aligned} (1-x^2)(1-y^2) &\geq 9x^2 y^2, \\ 1-x^2-y^2+x^2 y^2 &\geq 9x^2 y^2, \\ 1-x^2-y^2 &\geq 8x^2 y^2. \end{aligned}$$

Asendame

$$1-x^2-y^2 = 1^2-x^2-y^2 = (x+y)^2-x^2-y^2 = 2xy,$$

niisiis jääb tõestada võrratus  $2xy \geq 8x^2 y^2$ , mis on samaväärne võrratusega  $\frac{1}{4} \geq xy$ .

See seos aga järeldub aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest, sest  $\frac{1}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ .



13.21 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest kolme positiivse arvu jaoks teame, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

Järelikult saame

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 2\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}} = 2\sqrt{3}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $a = b = c$  ja  $\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$  ehk  $\sqrt[3]{a^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ .

Viimane võrrand lihtsustub kujule  $a = \frac{3}{a}$ , kust saame ülesande võrdusejahuks  $a = b = c = \sqrt{3}$ .

13.22 Vastus:  $x = 28$ ,  $y = 12$ ,  $z = 6$  ja  $u = 0$ .

Rakendame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust ülesande süsteemi esimesele võrrandile:

$$252 = 3x + 7y + 14z \geq 3\sqrt[3]{3x \cdot 7y \cdot 14z} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot xyz}.$$

Süsteemi teisest võrrandist teame, et  $xyz = 2016 + u^2 \geq 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ , niisiis saame võrratusega jätkata:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot xyz} \geq \sqrt[3]{2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252.$$

Niisiis peavad kõigis võrratustes tegelikult kehtima võrdused, st

$$3x = 7y = 14z, \quad u = 0 \quad \text{ja} \quad xyz = 2016.$$

Järelikult

$$3x \cdot 7y \cdot 14z = 3 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 2016 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7)^3 = 84^3,$$

millest saame

$$3x = 7y = 14z = 84$$

ehk  $x = 28$ ,  $y = 12$  ja  $z = 6$ .

13.23 Juhul  $n = 0$  saame triviaalselt kehtiva võrratuse  $a \leq a$ . Juhul  $n \geq 1$  saame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\frac{1 + \dots + 1 + a^{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot a^{n+1}},$$

mis on samaväärne tõestatava võrratusega.

13.24 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\begin{aligned} \left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{b_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \cdot 2\sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \\ &= 2^n \sqrt{\frac{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n}} = 2^n. \end{aligned}$$

Võrduse jaoks peab  $a_i = \frac{1}{b_i}$  kehtima iga indeksi  $i$  korral. Ülesande tingimuste põhjal on ka  $b_i$  üks antud arvudest, st  $a_j$  mingi indeksi  $j$  korral. Siis aga ka  $a_j = \frac{1}{b_j}$ , kus  $b_j$  on omakorda mingi  $a_k$ . Kokkuvõttes saame

$$a_i = \frac{1}{b_i} = \frac{1}{a_j} = \frac{1}{1/b_j} = b_j = a_k.$$

See tähendab, et antud arvud jagunevad tsüklitesse, kus igas tsüklis esineb vaheldumisi mingi positiivne reaalarv ja tema pöördarv. Kui see reaalarv ei ole 1, peab tsükli pikkus olema paarisarv. Samas kui  $n$  on paaritu, ei saa kõik antud arvud paarisarvulise pikkusega tsüklisse jaguneda. Järelikult peab sel juhul leiduma  $a_i$  väärtusega 1.

Sellel ülesandel on veel mitu huvitavat lahendust, mida saab lugeda brošüüri [13] 5. peatükist.

- 13.25 Esitame  $\frac{1996}{x}$  kui 1996 murru summa  $\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}$ . Siis saame ülesande avaldist hinnata aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse abil kui

$$\frac{x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}{2000} \geq \sqrt[2000]{x^{1000} \cdot x^{900} \cdot x^{90} \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

Järelikult

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1996}{x} \geq 2000,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x^{1000} = x^{900} = x^{90} = x^6 = \frac{1}{x}$  ehk kui  $x = 1$ .

## 13.4 Harmooniline keskmine ja ruutkeskmine

**Definitsioon 13.2** Reaalarvude  $x_1, x_2, \dots, x_n$  harmooniliseks keskmiseks nimetatakse suurust

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

ja ruutkeskmiseks suurust

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Selleks, et harmooniline keskmine oleks määratud, eeldame, et  $x_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Osutub, et harmooniline keskmine pole kunagi suurem kui geomeetriline.

**Teoreem 13.3** Olgu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positiivsed reaalarvud. Siis kehtib võrratus

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Tõestus.* Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust arvude  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$  jaoks:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}.$$

Teoreemi võrratuse saame, kui leiame saadud võrratuse mõlemast poolest pöördväärtsuse ja paneme tähele, et seejuures muutub võrratuse märk vastupidiseks. Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \dots = \frac{1}{x_n}$  ehk  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .  $\square$

Ka aritmeetilise ja ruutkeskmise vahel valitseb kindel võrratusseos.

**Teoreem 13.4** Olgu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  suvalised reaalarvud. Siis kehtib võrratus

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x_1 = x_2 = \dots = x_n \geq 0$ .

*Tõestus.* Vaatleme kõigepealt juhtu, kus  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on mittenegatiivsed. Sel juhul saame teoreemi võrratuse pooli ruutu tõstes samaväärse võrratuse

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n},$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Kirjutame viimase võrratuse vasaku poole lahti:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \\ &\quad + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + \dots + 2x_1x_n + \\ &\quad + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + \dots + 2x_2x_n + \\ &\quad \dots \\ &\quad + 2x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Niisiis tuleb tõestada võrratus

$$\begin{aligned} (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) &\geq 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + \dots + 2x_1x_n + \\ &\quad + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + \dots + 2x_2x_n + \\ &\quad \dots \\ &\quad + 2x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

See võrratus on aga samaväärne tõese võrratusega

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 \dots + (x_1 - x_n)^2 + \\ &\quad + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + \dots + (x_2 - x_n)^2 + \\ &\quad \dots \\ &\quad + (x_{n-1} - x_n)^2, \end{aligned}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Kui mõned arvudest  $x_i$  on negatiivsed, saame ülaltõestatud tulemust lihtsasti laiendada:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &< \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}{n}} = \\ &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \end{aligned}$$

Muuhulgas näeme, et kui arvude  $x_i$  seas leidub negatiivseid, siis teoreemi võrratuses võrdus kehtida ei saa.  $\square$

Aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust saab tõestada ka Jenseni võrratuse abil, vt jaotist 15.4.

Teoreemidest 13.2, 13.3 ja 13.4 saame kokkuvõtliku järelduse.

**Järeldus 13.1** Olgu antud positiivsete reaalarvude harmooniline keskmine  $HK$ , geomeetriline keskmine  $GK$ , aritmeetiline keskmine  $AK$  ja ruutkeskmine  $RK$ . Siis kehtivad võrratused

$$HK \leq GK \leq AK \leq RK.$$

## Ülesanded

**Ülesanne 13.26** (Lõppvoor 2003, 10. klass) Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{4}{3}.$$

**Ülesanne 13.27** (Sügisene lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Kas leiduvad sellised arvud  $a, b, c$ , mis rahuldavad võrrandit

$$2a(c-a) - b(2a+b) + c(2b-c) = 2020?$$

**Ülesanne 13.28** (Lõppvoor 2004, 12. klass) Olgu  $a, b$  ja  $c$  sellised positiivsed reaalarvud, et  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq 1.$$

**Ülesanne 13.29** (Talvine lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude  $x, y, z$  korral

$$\frac{y^2z}{x} + y^2 + z \geq \frac{9y^2z}{x+y^2+z}.$$

**Ülesanne 13.30** (Sügisene lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Olgu  $n$  ja  $k$  positiivsed

täisarvud, mille korral  $k \leq n$ . Tõesta võrratus

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \geq \frac{2(n-k+1)}{n+k}.$$

Vaata ka ülesannet 36.26.

## Lahendused

13.26 Teisendame ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$\frac{3}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} \leq 4.$$

Selle võrratuse vasakus pooles tunneme ära harmoonilise keskmise avaldise. Kasutame harmoonilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust ning eeldust  $a, b, c \leq 2$ :

$$\frac{3}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} \leq \sqrt[3]{bc \cdot ac \cdot ab} \leq \sqrt[3]{64} = 4.$$

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.18.

13.27 Teisendame ülesande avaldist:

$$\begin{aligned} 2ac - 2a^2 - 2ab - b^2 + 2bc - c^2 &= -(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2ac + a^2) + 2ab = \\ &= -(a+b)^2 - (c-a)^2 + 2bc. \end{aligned}$$

Ruut- ja aritmeetilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (c-a)^2}{2}} \geq \frac{(a+b) + (c-a)}{2} = \frac{b+c}{2},$$

järelikult

$$(a+b)^2 + (c-a)^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}.$$

Lisaks näeme, et kehtib ka võrratus  $\frac{(b+c)^2}{2} \geq 2bc$ , sest ta on samaväärne võrratusega

$$b^2 + 2bc + c^2 \geq 4bc,$$

$$b^2 - 2bc + c^2 \geq 0,$$

$$(b-c)^2 \geq 0.$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et  $(a+b)^2 + (c-a)^2 \geq 2bc$ , millest omakorda järeldub võrratus  $-(a+b)^2 - (c-a)^2 + 2bc \leq 0$ . Seega ei saa ülesande avaldise väärtus olla 2020.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 13.13.

13.28 Kasutame harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelist võrratust (vaata järeldust 13.1):

$$\begin{aligned} \frac{3}{\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca}} &\leq \frac{1+2ab+1+2bc+1+2ca}{3} = \frac{3+2ab+2bc+2ca}{3} = \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a^2+b^2+c^2}, \end{aligned}$$

niisiis

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}.$$

Ülesande lahendamiseks piisab, kui näitame, et selle võrratuse parem pool on vähemalt 1. See väide on vamaäärne võrratustega

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca, \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib tänu harjutuse 13.1 tulemusele.

13.29 Harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{3y^2z}{x + y^2 + z} = \frac{3}{\frac{x}{y^2z} + \frac{y^2}{y^2z} + \frac{z}{y^2z}} \leq \frac{\frac{y^2z}{x} + \frac{y^2z}{y^2} + \frac{y^2z}{z}}{3} = \frac{\frac{y^2z}{x} + z + y^2}{3},$$

millest järeldubki ülesande võrratus.

13.30 Paneme tähele, et ülesande summas on  $n - k + 1$  liiget. Kasutame harmoonilise ja aritmeetilise keskmise vahelist võrratust ning aritmeetilise jada summa valemit:

$$\frac{n - k + 1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}} \leq \frac{k + (k+1) + \dots + n}{n - k + 1} = \frac{(n+k)(n-k+1)}{2(n-k+1)} = \frac{n+k}{2}.$$

Siit järeldubki ülesande võrratus.