13. Funktsionaalvõrrandid

13.1 Funktsiooni mõiste

Paljudes inimtegevuse valdkondades tekivad olukorrad, kus ühe suuruse muutumine toob endaga kaasa mingi teise suuruse muutumise. Näiteks

- kui suurendada saatejaama võimsust, on raadiosignaali võimalik vastu võtta kaugemal,
- vanuse kasvades inimese kehaline võimekus alul tõuseb, hiljem aga hakkab jälle langema,
- kui rahvastiku elatustase langeb, hakkavad sagenema valitsusvastased meeleavaldused,
- taimekaitsevahendite kasutamine suuremas mahus toob endaga kaasa saagikuse tõusu, aga ka mesilaste arvu languse.

Olukorda, kus ühe suuruse mingile väärtusele vastab alati teise suuruse kindel väärtus, nimetame *funktsionaalseks sõltuvuseks* ja seda vastavust ennast nimetamegi *funktsiooniks*.

Sugugi mitte iga mõeldav seos ei ole funktsionaalne. Näiteks kui me üritaksime leida funktsiooni, mis annaks inimese pikkuse järgi tema kehakaalu, jääksime hätta, sest leidub palju inimesi, kes on sama pikad, aga erineva kaaluga. Niisiis pole kaal pikkuse järgi üheselt määratud. Küll aga saaksime funktsiooni, kui uuriksime inimeste *keskmist* kaalu sõltuvalt nende pikkusest, sest sama pikkusega inimeste keskmine kaal oleks üks konkreetne arv.

Igal funktsioonil on seega olemas võimalikud sisendid ja võimalikud väljundid. Funktsiooni matemaatiline käsitlus algabki sisendite hulga (*määramispiirkonna*) ja väljundite hulga (*muutumispiirkonna*) määramisega.

Asjaolu, et funktsioon f saab sisendiks hulga X elemente ja väljastab hulga Y elemente, tähistatakse

$$f : X \to Y\,.$$

Asjaolu, et funktsioon f seab suurusele $x \in X$ vastavusse suuruse $y \in Y$, tähistatakse

$$y = f(x)\,.$$

Teisisõnu, kui x on funktsiooni sisendi väärtus, siis $f(x)$ on funktsiooni väljundi väärtus sisendil x. Kuna funktsioonide käsitlemise mõte on uurida väljundite sõltuvusi sisenditest, öeldakse ka, et x on *vaba* ehk *sõltumatu muutuja* ning y on *sõltuv muutuja*.

Sageli kerkivad funktsionaalsed sõltuvused esile olukordades, kus sisendeid ja väljundeid saab mingites ühikutes mõõta. Sellepärast on funktsioonide määramis- ja muutumispiirkondadeks sageli mingid arvuhulgad (nt realaarvud või mittenegatiivsed reaalarvud), aga see ei pea nii olema.

Funktsioonde sisenditeks ja väljunditeks võivad olla mistahes matemaatilised objektid. Nii näiteks on täiesti korrektne rääkida funktsioonist, mille määramispiirkonnaks on tasandi kõigi ringjoonte hulk, muutumispiirkonnaks sama tasandi kõigi punktide hulk ja mis seab igale ringjoonele vastavusse tema keskpunkti.

Kui sa oled kokku puutunud mõne programmeerimiskeelega, siis oled tõenäoliselt seal ka funktsioone kohanud. Need on matemaatikas käsitletavate üldiste funktsioonidega väga lähedalt seotud. Ka programmeerimises esinevatel funktsioonidel on olemas sisendid ja väljundid; ainsaks tõsisemaks erinevuseks on, et programmeerimises kasutamiseks peab funktsioon olema *arvutatav*. Matemaatikas nõutakse seevastu ainult, et väljund peab sisendi põhjal olema üheselt määratav, aga mitte tingimata täpselt välja arvutatav.

■ **Näide 13.1** Olgu $\mathbb{N}$ naturaalarvude ja $\mathbb{R}^*$ mittenegatiivsete realaarvude hulk ning vaatleme funktsiooni

$$\sqrt{\ } : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*,$$

mis seab igale naturaalarvule n vastavusse niisuguse reaalarvu r, et $r^2 = n$. (Seda funktsiooni tunneme loomulikult *ruutjuure* nime all.) On võimalik tõestada, et niisugune mittenegatiivne reaalarv r alati leidub ja et ta on üheselt määratud. Samas teame ka, et näiteks $\sqrt{2}$ on irratsionaalne, st lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd (vt harjutus 24.1). See aga tähendab omakorda, et tema kümnendesituse *täpne* väljaarvutamine on võimatu! Arvutiprogrammid suudavad $\sqrt{2}$ väärtust küll kuitahes hästi lähendada ja sellest praktikas piisab. Matemaatiliselt rangelt võttes pole aga niimoodi arvutatavate funktsioonide puhul tegu ruutjuurefunktsiooniga. ■

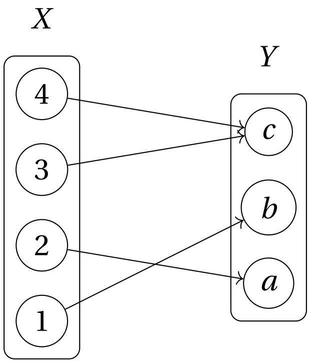
13.2 Funktsioonide esitused

Niisiis, funktsioon on miski, mis seab sisendväärtustele vastavusse väljundväärtusi. Aga mismoodi kirjeldada, kuidas ta seda täpselt teeb? Selleks on sõltuvalt olukorrast mitu võimalust.

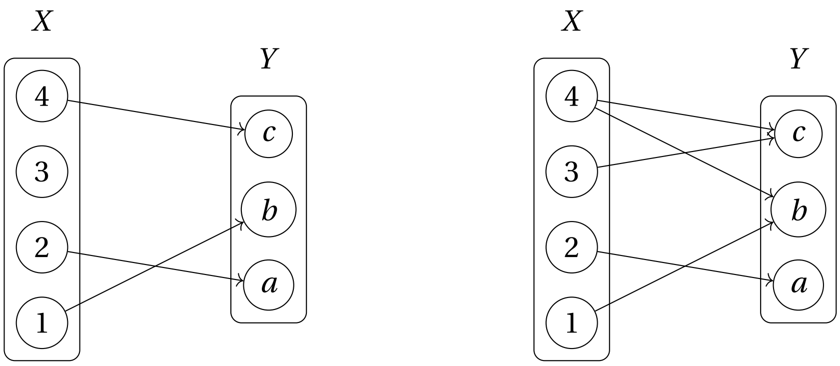
Kui vaadeldavad määramis- ja muutumispiirkonnad on väikesed lõplikud hulgad, saab funktsiooni esitada graafiliselt, näiteks nii nagu näidatud joonisel 13.1.

Graafilises keeles tähendab seose funktsiooniks olemine, et igast määramispiirkonna X elemendist väljub täpselt üks vastavusnool muutumispiirkonna Y mingisse elementi. Seejuures on lubatud, et mitu noolt hulga Y mõne elemendi juures “kokku jooksevad”.

Aga näiteks vastavused joonisel 13.2 ei kirjelda funktsioone, sest vasakpoolsel ei ole vastavuse väärtus kohal $3 \in X$ määratud, parempoolsel aga vastab väärtusele $4 \in X$ kaks väärtust hulgast Y.



Joonis 13.1



Joonis 13.2

Väga levinud on lõpliku määramispiirkonnaga funktsioonide esitamine tabelina. Näiteks võime joonisel 13.1 antud funktsiooni panna kirja nii:

x	$f(x)$
1	b
2	a
3	c
4	c

Kui palju erinevaid funktsioone üldse on? Osutub, et lõpliku määramis- ja muutumispiirkonna puhul vastab sellele küsimusele lihtne valem.

Teoreem 13.1 Olgu X ja Y lõplikud mittetühjad hulgad. Erinevaid funktsioone $X \to Y$ on $|Y|^{|X|}$ tükki.

Tõestus. Fikseerime hulga X elementidel mingi järjestuse ja mõtleme funktsioonide $f : X \to Y$ tabeliesituse peale, kus tabeli read on antud fikseeritud järjestuses. Igas sellises tabelis on siis $|X|$ rida ja iga rea teises veerus on hulga Y üks element. Seejuures on kõigi teise veeru elementide valik sõltumatu ja iga valikute komplekt kirjeldab täpselt ühte funktsiooni. Valikute koguarv on seega

$$\underbrace{|Y| \cdot |Y| \cdot \ldots \cdot |Y|}_{|X|} = |Y|^{|X|}.$$

Sisuliselt kasutasime siinkohal kombinatoorikast tuttavat korrutamisreeglit, vt peatükki 7. □

▪ **Näide 13.2** Olgu $X = \{1,2,3\}$ ja $Y = \{a,b\}$. Siis on olemas $|Y|^{|X|} = 2^3 = 8$ erinevat funktsiooni $f : X \to Y$ tabelitega

x	$f(x)$
1	a
2	a
3	a

x	$f(x)$
1	a
2	a
3	b

x	$f(x)$
1	a
2	b
3	a

x	$f(x)$
1	a
2	b
3	b

x	$f(x)$
1	b
2	a
3	a

x	$f(x)$
1	b
2	a
3	b

x	$f(x)$
1	b
2	b
3	a

x	$f(x)$
1	b
2	b
3	b

▪

Mis saab siis, kui funktsiooni määramispiirkond on lõpmatu? Kuidas näevad näiteks välja funktsioonid $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Vastavalt funktsiooni määratlusele tähendab $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et naturaalarvule 0 on vastavusse seatud mingi reaalarv (olgu ta a_0), naturaalarvule 1 on vastavusse seatud mingi reaalarv (olgu ta a_1) jne. Sisuliselt esitab funktsioon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reaalarvuliste väärtustega jada

$$a_0, a_1, \dots,$$

kus $f(n) = a_n$ iga $n = 0, 1, \dots$ korral.

Vahel (ja võistlusülesannetes enamasti) juhtub, et $f(n) = a_n$ väärtuse saab indeksi n järgi matemaatiliste tehete abil avaldada. Nii näiteks võime jada

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

esitada lühidalt kujul $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$, jada

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

aga kujul $f(n) = 2^n$.

Samas on oluline mõista, et nii ilusad ja kompaktsed esitused leiduvad vaid väga vähestel jadadel. Valdavat enamust funktsioone $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ polegi üldse võimalik kuidagi mõistlikult kirjeldada. Peamine põhjus on see, et neid funktsioone on lihtsalt liiga palju. Analoogiliselt teoreemiga 13.1 saame väita, et funktsioone $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on mingis mõttes $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|}$ tükki. Me ei süvene siinkohal sellesse, mida avaldis $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|}$ täpsemalt tähendab. Küll aga on selge, et jadasid, mille üldliiget saab kirjeldada näiteks kuni 100 sümboliga, on lõplik arv, sellal kui funktsioone $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on lõpmatult.

Loomulikult pole olukord parem ka funktsioonide $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puhul, pigem vastupidi. Reaalarve on veel rohkem kui naturaalarve, nii et mingi tabeli- või jadalaadne esitus ei tule kõne alla. Peamine kompaktne viis reaalfunktsioonide kirjeldamiseks on seega jälle arvutuseeskirja väljendav avaldis, kus kasutatakse vaba sisendmuutujat x ning matemaatilisi operatsioone. Kooliõpikust on tuttavad näiteks funktsioonid $\sqrt[3]{x}$, $\sin(x)$, $\dfrac{1}{x}$ jne. Jällegi tasub meeles pidada, et niimoodi õnnestub kõigi võimalike reaalfunktsioonide seast esitada vaid väga väikest osa, kuid koolis ja matemaatikavõistlustel sellest osast piisab.

Omaette tähtsusega funktsioonide klassi moodustavad konstantsed funktsioonid, st sellised funktsioonid $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis seavad igale sisendile $x \in \mathbb{R}$ vastavusse sama arvu $c \in \mathbb{R}$. Niisuguse funktsiooni kohta kirjutame siis $f(x) = c$. Selle tähistuse osas tasub olla tähelepanelik, sest sama moodi võidakse teistsugustes ülesannetes tähistada teistsuguseid matemaatilisi ideid. Kui me räägime näiteks tavaliste arvvõrrandite lahendamisest, siis võib $f(x) = 0$ tähendada hoopopis ülesannet leida kõik $x \in X$ väärtused, mis muudavad funktsioon f väärtuse 0-ks. Käesolevas peatükis aga tähendab $f(x) = 0$ niisugust funktsiooni, mis seab igale sisendile $x \in X$ vastavusse väljundi 0.

13.3 Funktsionaalvõrrandid

Kui tavaliselt otsime võrrandite lahenditena arve, siis funktsionaalvõrrandite korral on otsitavateks objektideks funktsioonid. Selles raamatus saame anda vaid väikese ülevaate funktsionaalvõrrandite mõnedest levinumatest lahendusvõtetest; põhjalikumat materjali leiab lugeja veebiõpikust [15].

Kuigi funktsionaalvõrrandid võivad esimesel pilgul hirmutavad tunduda, ei maksa lasta ennast neist ära ehmatada. Funktsionaalvõrrandiülesannete tingimused on tüüpiliselt sõnastatud kõigi määramispiirkonna elementide jaoks. See tähendab, et meil on midagi teada väga suure hulga, lausa lõpmata paljude arvude korral! Aga mida rohkem andmeid meil antud on, seda lihtsam on ülesanne, eks ju?

Funkstionaalvõrrandite lahendamisel ongi esimene samm enamasti muutujate vaba valikut kitsendada. Näiteks võib proovida asendada muutujad mõnede lihtsate konstantsete väärtustega (nt 0 või 1) ning vaadata, mis välja tuleb. Kui funktsionaalvõrrandis on mitu vaba muutujat, võib proovida neid omavahel võrdseks võtta või nende rolle vahetada.

Ülesanne 13.1 (Sügisene lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja võtavad reaalarvulisi väärtusi ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x, y korral tingimust

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y\,.$$

Lahendus. Reaalarvude summa ei sõltu liidetavate järjekorrast, järelikult kehtib iga x, y korral $f(x) + f(y) = f(y) + f(x)$. Kuna f on funktsioon, annab ta võrdsetel sisenditel sama väljundi, st

$$f(f(x) + f(y)) = f(f(y) + f(x))\,.$$

See tähendab, et ülesande võrrandis võib x-i ja y-i rollid vahetada ning võrrandi vasaku poole väärtus sellest ei muutu. Järelikult jääb ka parema poole väärtus muutujate rollide vahetusel samaks, mistõttu saame

$$f(x) + y = f(y) + x$$

kõigi reaalarvude x, y korral. Valides siin $y = 0$, saame $f(x) = f(0) + x$; niisiis saab funktsioon f olla ainult kujul $f(x) = x + c$ mingi konstandi c jaoks, kus $c = f(0)$. Asendame $f(x) = x + c$ algsesse võrrandisse:

$$\begin{aligned}(x + c + y + c) + c &= x + c + y\,,\\ x + y + 3c &= x + y + c\,,\end{aligned}$$

kust saame $c = 0$. Järelikult saab ülesande lahendiks olla vaid $f(x) = x$. Vahetu asendus ülesande võrrandisse näitab, et see lahend tõepoolest sobib, sest $x + y = x + y$ iga x, y korral.

Funktsinaalvõrrandeid lahendataksegi tüüpiliselt kitsendamise meetodil. Enne lahendama asumist võib f põhimõtteliselt olla suvaline funktsioon hulgast X hulka Y. Siis leiame sammhaaval järjest täpsemaid tingimusi (näiteks funktsiooni väärtused mingitel kindlatel sisenditel jne). Selleks, et otsustada, kas leitud kitsendused määravad võrrandi lahendid juba täpselt ära, tuleb leitavaid võimalikke lahendeid kindlasti kontrollida.

Ülesanne 13.2 (Kevadine lahtine võistlus 2004, vanem rühm) Leia kõik sellised funktsioonid f, mis on määratud positiivsetel reaalarvudel, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes positiivsete reaalarvude x ja y korral samasust

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Lahendus. Kuna võrrandis esinevad suurused $f(x)$, $f(y)$ ja $f(xy)$, on lootust leida mõni kasulik seos, kui uurida asendust $x = y = 1$. See asendus annab meile

$$\begin{aligned} f(1)f(1) &= f(1) + 1 + 1, \\ f(1)^2 - f(1) - 2 &= 0, \\ (f(1)+1)(f(1)-2) &= 0. \end{aligned}$$

Järelikult on kaks võimalust, kas $f(1) = -1$ või $f(1) = 2$.

Vaatleme kõigepealt juhtu $f(1) = -1$ ja asendame $y = 1$ ülesande võrrandisse. Saame

$$-f(x) = f(x) + \frac{1}{x} + 1,$$

millest leiame esimese võimaliku lahendi $f(x) = -\frac{x+1}{2x}$.

Juhul $f(1) = 2$ asendame samuti $y = 1$ ülesande võrrandisse ja saame

$$2f(x) = f(x) + \frac{1}{x} + 1,$$

millest leiame teise võimaliku lahendi $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

Lahendite kontrollimisel selgub, et esimene leitud võimalus ei sobi. Asendus $f(x) = -\frac{x+1}{2x}$ ülesande võrrandisse ei anna samasust, aga formaalseks tõestuseks piisab sellest, kui me suudame näidata konkreetsed x ja y väärtused, mille korral võrdus ei kehti. Sobiv valik on näiteks $x = y = 2$, siis $f(2) = -\frac{3}{4}$ ja $f(4) = -\frac{5}{8}$, aga $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \neq -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Teine võimalik lahend $f(x) = \frac{x+1}{x}$ aga sobib, sest

$$\frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} = \frac{(x+1)(y+1)}{xy} = \frac{xy+1}{xy} + \frac{x+y}{xy} = \frac{xy+1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Funktsionaalvõrrandi lahendamise eesmärk on leida avaldis $f(x)$ jaoks, kus x on vaba muutuja määramispiirkonnas X, st ta saab seal kitsendamata võtta kõik väärtused hulgast X. Vahel võib aga juhtuda, et me saame funktsiooni $f(\cdot)$ kohta avaldise, kus funktsiooni argumendiks pole üksik muutuja, vaid mingi muutujast x sõltuv avaldis, mis sellegipoolest saab võtta kõik määramispiirkonna väärtused. Tüüpiliseks näiteks on siinjuures $X = \mathbb{R}$ ja $f(ax+b)$, kus $a \neq 0$ ja b on mingid reaalarvulised konstandid. Sel juhul aitab ka $f(ax+b)$ jaoks leitud avaldis meil funktsiooni täielikult määrata.

Ülesanne 13.3 (Sügisene lahtine võistlus 1994, vanem rühm) Leia kõik niisugused funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x) \cdot f(y) = f(x-y)\,.$$

Lahendus. Paneme tähele, et funktsioonid $f(x) = 0$ ja $f(x) = 1$ rahuldavad ülesande tingimusi ja näitame et muid sobivaid funktsioone ei ole.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus leidub niisugune $a \in \mathbb{R}$, et $f(a) = 0$. Jätame x vabaks muutujaks ja asendame $y = a$, mis annab

$$f(x) \cdot 0 = f(x-a)$$

ehk $f(x-a) = 0$. Kuna avaldis $x-a$ võtab samuti kõik reaalarvulised väärtused, saab f sel juhul olla ainult nullfunktsioon.

Jääb üle vaadelda juhtu, kus ei leidu ühtegi reaalarvu, mis annaks funktsiooni f väärtuseks 0. Valime vabaks muutujaks y, asendame ülesande võrrandis $x = 2y$ ja saame

$$f(2y) \cdot f(y) = f(y)\,.$$

Kuna $f(y) \neq 0$, järeldub siit $f(2y) = 1$ iga y korral. Kuna avaldis $2y$ võtab samuti kõik reaalarvulised väärtused, peab f olema funktsioon, mis annab iga reaalarvu korral väljundiks 1.

Naturaal- ja täisarvudel töötavate funktsioonide puhul on sageli kasu matemaatilisest induktsioonist (vt jaotist 1).

Harjutus 13.1 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, mis rahuldavad iga täisarvu x korral võrdust

$$f(x+1) = f(x) + 1\,.$$

Lahendus. Tähistame $f(0) = c$. Siis on lihtne näha, et

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) + 1 = c + 1\,, \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) + 1 = (c+1) + 1 = c + 2\,, \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) + 1 = (c+2) + 1 = c + 3 \end{aligned}$$

ja nii edasi. Tekib hüpotees, et otsitavad funktsioonid võiksid avalduda kujul $f(x) = x + c$. Oleme väite paikapidavuse juba kontrollinud väikeste naturaalarvude x korral ja see sobib induktsiooni baasiks. Induktsiooni sammu jaoks eeldame, et mingi naturaalarvu k korral kehtib võrdus $f(k) = k + c$, ning kasutame ülesande tingimust $k+1$ jaoks:

$$f(k+1) = f(k) + 1 = (k+c) + 1 = (k+1) + c\,.$$

Matemaatilise induktsiooni printsiibist järeldub, et võrdus $f(x) = x + c$ kehtib kõigi naturaalarvude x korral.

Aga kuidas on lugu negatiivsete täisarvudega? Paneme tähele, et ülesande tingimuste põhjal

$$c = f(0) = f(-1+1) = f(-1)+1\,,$$

seega $f(-1) = -1 + c$;

$$-1 + c = f(-1) = f(-2+1) = f(-2)+1\,,$$

seega $f(-2) = -2 + c$ jne. Üldjuhul saame negatiivsete x väärtuste jaoks kasutada induktsiooni üle x absoluutväärtuse. Me oleme juba kontrollinud väite kehtivuse baasjuhtudel $x = -1$ ja $x = -2$. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et mingi naturaalarvu k jaoks kehtib võrdus $f(-k) = -k + c$, ja leiame $f(-(k+1))$ väärtuse:

$$-k + c = f(-k) = f(-(k+1)+1) = f(-(k+1))+1\,,$$

järelikult $f(-(k+1)) = -(k+1)+c$. Oleme tõestanud induktsiooni sammu ja sellega koos ka väite kehtivuse kõigi täisarvude jaoks.

Harjutus 13.2 Leia näide funktsioonist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldab iga reaalarvu x korral võrdust

$$f(x+1) = f(x)+1\,,$$

aga mis ei ole kujul $f(x) = x + c$.

Ülesanded

Ülesanne 13.4 (Lõppvoor 2004, 11. klass) Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud mittenegatiivsetel reaalarvudel, omandavad mittenegatiivseid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral tingimust

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot (f(x) + f(y))\,.$$

Ülesanne 13.5 (Sügisene lahtine võistlus 1996, vanem rühm) Tõesta, et ei leidu niisugust täisarvudel määratud täisarvuliste väärtustega funktsiooni f, mis iga täisarvu x korral rahuldaks tingimust

$$f(f(x)) = x+1\,.$$

Ülesanne 13.6 (Sügisene lahtine võistlus 2003, vanem rühm) Olgu $\mathbb{R}^+$ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, mille jaoks iga x, y korral hulgast $\mathbb{R}^+$ kehtib võrdus

$$y^2 \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Ülesanne 13.7 (Sügisene lahtine võistlus 2014, vanem rühm) Leia kõik sellised funktsioonid, mis on määratud kõigil reaalarvudel ja annavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x+y)f(y)=f(x+xf(y)).$$

Ülesanne 13.8 (Talvine lahtine võistlus 2014, vanem rühm) Leia kõik sellised funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x^2)+f(xy)=f(f(x+y)).$$

Ülesanne 13.9 (Sügisene lahtine võistlus 2019, vanem rühm) Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigil reaalarvudel, annavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$f(xf(y)+y)=f(x^2+y^2)+f(y).$$

Ülesanne 13.10 (Kevadine lahtine võistlus 2005, vanem rühm) Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigil reaalarvudel, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mis tahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x+f(y))=x+f(f(y)),$$

kusjuures $f(2004)=2005$.

Ülesanne 13.11 (Sügisene lahtine võistlus 2016, vanem rühm) Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja võtavad reaalarvulisi väärtusi ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$f(x+y)f(xy)=f(x^2-y^2+1).$$

Ülesanne 13.12 (Talvine lahtine võistlus 2012, vanem rühm) Leia kõik sellised funktsioonid f positiivsete täisarvude hulgast sellessesamasse hulka, mis rahuldavad järgmist tingimust: mistahes positiivsete täisarvude k ja $a_1,\ldots,a_k$ korral arv $f(a_1)+\ldots+f(a_k)$ jagub arvuga $a_1+\ldots+a_k$.

Ülesanne 13.13 (Kevadine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Reaalarvuliste väärtustega funktsioon f rahuldab suvaliste reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(xy)=f(x)y+xf(y).$$

Tõesta, et see funktsioon rahuldab suvaliste reaalarvude x ja $y\neq 0$ korral võrdust

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)y-xf(y)}{y^2}.$$

Lahendused

13.4 Vastus: $f(x)=0$ ja $f(x)=\sqrt{x}$.

Asendades $x=1$ ja $y=1$, lihtsustub ülesande võrrand kujule $2f(1)=2f(1)^3$, millest saame $f(1)=0$ või $f(1)=1$.

Kui $f(1)=0$, võtame ülesande võrrandis $y=1$ ja saame iga mittenegatiivse reaalarvu x jaoks

$$x\cdot f(1)+1\cdot f(x)=f(x)\cdot f(1)\cdot(f(x)+f(1)),$$

mis lihtsustub tingimuse $f(1)=0$ tõttu kujule $f(x)=0$. See võrdus kehtib määramispiirkonna iga elemendi x korral ja järelikult kirjeldab kogu arvutuseeskirja. Seega on $f(x)=0$ esimene võimalik lahend.

Kui $f(1)=1$, võtame ülesande võrrandis uuesti $y=1$ ja saame iga mittenegatiivse reaalarvu x jaoks jälle

$$x\cdot f(1)+1\cdot f(x)=f(x)\cdot f(1)\cdot(f(x)+f(1)).$$

See võrdus lihtsustub nüüd tänu tingimusele $f(1)=1$ aga kujule

$$\begin{aligned}x+f(x)&=f(x)(f(x)+1),\\ x+f(x)&=f(x)^2+f(x),\\ f(x)^2&=x,\\ f(x)&=\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Seega $f(x)=\sqrt{x}$ ongi teine võimalik lahend.

Kontrollime leitud võimalikke lahendeid. Esimene kandidaat $f(x)=0$ annab ülesande võrrandisse asendades triviaalselt kehtiva võrduse $0=0$. $f(x)=\sqrt{x}$ puhul aga saame

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

mis kehtib samuti kõigi mittenegatiivsete x,y korral. Seega mõlemad leitud lahendid sobivad.

13.5 Lahenduse ideeks on koostada avaldis, mida saab ülesande võrduse abil väärtustada kahel moel. Sobivaks avaldiseks on $f(f(f(x)))$. Kuna ühest küljest iga täisarvu x korral $f(f(x))=x+1$, siis peab iga täisarvu x jaoks kehtima ka võrdus $f(f(f(x)))=f(x+1)$. Teisest küljest aga on ja $f(x)$ täisarv, niisiis kehtib ka samasus $f(f(f(x)))=f(x)+1$. Niisiis saame iga täisarvu x jaoks võrduse

$$f(x+1)=f(x)+1.$$

See võrdus ütleb, et alati kui funktsiooni argumenti suurendada 1 võrra, suureneb 1 võrra ka funktsiooni väärtus. Sellist omadust rahuldavad täpselt funktsioonid kujul $f(x)=x+c$ mingi konstandi c korral (vt harjutust 13.1). Nüüd aga saame ülesande tingimusest

$$x+1=f(f(x))=f(x+c)=x+2c.$$

Niisiis sobib ainult $c=\frac{1}{2}$, aga funktsioon $f(x)=x+\frac{1}{2}$ ei anna täisarvulistel kohtadel täisarvulisi väärtusi. Seega puuduvad ülesande võrrandil lahendid.

13.6 Vastus: kõik funktsioonid kujul $f(x)=\frac{a}{x^2}$, kus $a\in\mathbb{R}^+$.

Võttes $x=y$, saame

$$x^2\cdot f(x)=f(1)\quad\text{ehk}\quad f(x)=\frac{f(1)}{x^2}.$$

Kontrollime, et kõik funktsioonid kujul $f(x) = \dfrac{a}{x^2}$ (kus $a \in \mathbb{R}^+$) rahuldavad ülesande võrrandit:

$$y^2 \cdot f(x) = y^2 \cdot \frac{a}{x^2} = a \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Niisiis ongi lahenditeks kõik funktsioonid kujul $f(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

13.7 Vastus: $f(x) = 0$ ja $f(x) = 1$ on ainsad lahendid.

Asendus $x = y = 0$ ülesande võrrandisse annab $f(0)f(0) = f(0)$, millest saame kas $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$.

Kui $f(0) = 0$, asendame ülesande võrrandisse $y = 0$ ja jätame x vabaks muutujaks. Siis saame

$$\begin{aligned} f(x)f(0) &= f(x + xf(0)), \\ 0 &= f(x), \end{aligned}$$

mis annab meile esimese võimaliku lahendi.

Kui $f(0) = 1$, asendame ülesande võrrandisse $x = 0$ ja jätame y vabaks muutujaks. Saame

$$f(y)f(y) = f(0 + 0f(y)) = f(0) = 1.$$

Järelikult peab iga $y \in \mathbb{R}$ korral kehtima kas $f(y)) = 1$ või $f(y) = -1$. Näitame, et viimane variant pole võimalik. Selleks oletame vastuväiteliselt, et leidub selline y_0, mille korral $f(y_0) = -1$. Asendame ülesande võrrandisse $y = y_0$ ja saame iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$f(x + y_0)f(y_0) = f(x + xf(y_0)) = f(x - x) = f(0) = 1.$$

Valides nüüd $x = -y_0$ saame teisest küljest

$$f(x + y_0)f(y_0) = f(0)f(y_0) = 1 \cdot (-1) = -1,$$

vastuolu. Niisiis on teiseks võimalikuks lahendiks funktsioon $f(x) = 1$.

Vahetu kontroll näitab, et mõlemad leitud lahendid sobivad.

13.8 Vastus: ainus lahend on $f(x) = 0$.

Lahenduse võti on näidata, et $f(x)$ peab olema konstantne funktsioon. Võtame ülesande võrrandis $x = 0$ ja saame

$$2f(0) = f(f(y)).$$

See tähendab, et $f(f(y))$ peab olema võrdne konstandiga $2f(0)$ iga reaalarvu y jaoks. Järelikult ka iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib $f(f(x + y)) = 2f(0)$. Nüüd saame ülesande võrrandist asendusega $x = 1$

$$f(y) = 2f(0) - f(1),$$

mis tähendab, et $f(y)$ on iga $y \in \mathbb{R}$ jaoks konstant. Olgu siis $f(x) = c$, mistõttu ülesande võrrandist saame

$$c + c = c,$$

järelikult $c = 0$. Viimane seos näitab ka, et lahend $f(x) = 0$ tõepoolest sobib.

13.9 Vastus: $f(x) = 0$ on ainus lahend.

Asendus $x = y = 0$ annab $f(0) = f(0) + f(0)$, järelikult $f(0) = 0$. Võttes nüüd ülesande võrrandis ainult $y = 0$ ja jättes x vabaks muutujaks, saame

$$f(xf(0) + 0) = f(x^2 + 0) + f(0)\,,$$

millest järeldub $f(x^2) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks. See on aga samaväärne väitega, et $f(x) = 0$ iga mittenegatiivse reaalarvu x korral. Muuhulgas tähendab see, et $f(x^2 + y^2) = 0$, mistõttu ülesande võrrand lihtsustub kujule

$$f(xf(y) + y) = f(y)$$

kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks.

Oletame nüüd, et leidub mõni $y_0 < 0$, mille korral $f(y_0) \neq 0$. Valime $x_0 \in \mathbb{R}$ nii, et $x_0 f(y_0) > -y_0$ ehk $x_0 f(y_0) + y_0 > 0$ (tänu tingimusele $f(y_0) \neq 0$ on see kindlasti võimalik). Siis aga saame nende x_0, y_0 jaoks

$$0 = f(x_0 f(y_0) + y_0) = f(y_0) \neq 0\,,$$

vastuolu. Seega ei saa leiduda ka negatiivset arguimendi väärtust, millel funktsiooni f väärtus poleks 0.

13.10 Vastus: ainus sobiv funktsioon on $f(x) = x + 1$.

Asendades $y = 0$ ja jättes x-i vabaks muutujaks, saame

$$f(x + f(0)) = x + f(f(0))\,.$$

Kuna $f(0)$ on mingi konstant, siis omandab avaldis $x + f(0)$ kõik reaalarvulised väärtused. Täpsemalt saame väärtuse $z \in \mathbb{R}$ siis, kui $x = z - f(0)$. Muutujavahetus $x + f(0) = z$ annab

$$f(z) = z - f(0) + f(f(0))\,,$$

järelikult avaldub funktsioon $f(z)$ kujul $z + c$ ming reaalarvulise konstandi c jaoks. Tingimusest $f(2004) = 2005$ saame, et $c = 1$. Vahetu kontroll näitab, et

$$f(x + f(y)) = x + y + 2 = x + f(f(y))\,,$$

seega see funktsioon tõepoolest sobib ülesande lahendiks.

13.11 Vastus: $f(x) = 0$ ja $f(x) = 1$.

Asendus $x = y = 0$ annab seose $f(0)f(0) = f(1)$.

Valides ülesande võrrandis $y = -x$, saame $f(0)f(-x^2) = f(1)$.

Vaatleme juhtu $f(0) \neq 0$. Siis järeldub viimati saadud võrdusest

$$f(-x^2) = \frac{f(1)}{f(0)} = f(0)\,.$$

Teisisõnu, iga mittepositiivse argumendi väärtuse korral langeb funtsiooni väärtus kokku tema väärtusega kohal 0.

Olgu nüüd z suvaline mittenegatiivne arv. Valides ülesande võrduses $x = y = -z$, saame $f(-2z)f(z^2) = f(1)$. Kuna $-2z$ on mittepositiivne, teame, et vaadeldaval juhul $f(-2z) = f(0) \neq 0$. Järelikult

$$f(z^2) = \frac{f(1)}{f(-2z)} = \frac{f(1)}{f(0)} = f(0)\,.$$

Kuna z^2 võtab kõikvõimalikud mittenegatiivsed väärtused, saame, et otsitava funktsiooni väärtus võrdub tema väärtusega kohal 0 ka kõigi mittenegatiivsete argumendi väärtuste korral.

Niisiis mingi konstandi c jaoks kehtib $f(x) = c$ iga reaalarvu x korral. Ülesande võrdusest järeldub nüüd, et $c^2 = c$. Kuna me käsitleme hetkel juhtu $f(0) \neq 0$, saab ainsaks c väärtuseks olla 1.

Vaatleme nüüd olukorda, kus $f(0) = 0$. Valides ülesande võrrandis $x = 0$, saame $0 = f(-y^2 + 1)$. Avaldis $-y^2 + 1$ võtab parajasti kõik reaalarvulised väärtused, mis pole suuremad kui 1. Niisiis kõigi selliste argumendi väärtuste korral on funktsiooni väärtus 0.

Valides aga $y = 0$, saame ülesande võrrandist $0 = f(x^2 + 1)$. Avaldis $x^2 + 1$ võtab parajasti kõik reaalarvulised väärtused, mis pole väiksemad kui 1. Niisiis ka kõigi selliste argumendi väärtuste korral on funktsiooni väärtus 0, Kokkuvõttes sel juhul $f(x) = 0$ iga reaalarvu x korral.

Lõpetuseks on lihtne kontrollida et nii $f(x) = 0$ kui $f(x) = 1$ rahuldavad ülesande tingimusi.

13.12 Vastus: sobivad kõik funktsioonid kujul $f(a) = n \cdot a$, kus n on mingi positiivne täisarv.

Olgu $f(1) = n$. Näitame, et siis iga positiivse täisarvu a korral $f(a) = n \cdot a$ ehk $f(a) - n \cdot a = 0$. Lahenduse võtmeideeks on näidata, et vahe $f(a) - n \cdot a$ jagub kõigi täisarvudega, mis on suuremad kui a (ja järelikult saab see vahe olla ainult 0).

Valime siis suvalise $t > a$ ja uurime summat

$$f(a) + \underbrace{f(1) + \ldots + f(1)}_{t-a \text{ korda}}.$$

Ülesande tingimuste põhjal peab see summa jaguma arvuga $a + (t-a) \cdot 1 = t$.

Teisest küljest on selle summa väärtus $f(a) + (t-a) \cdot n = f(a) - a \cdot n + t \cdot n$. Kuna $t \cdot n \,\vdots\, t$, saame ka $f(a) - n \cdot a \,\vdots\, t$, nagu oligi tarvis.

On lihtne kontrollida, et kõik funktsioonid kujul $f(a) = n \cdot a$ rahuldavad ülesande tingimusi:

$$f(a_1) + \ldots + f(a_k) = n \cdot a_1 + \ldots + n \cdot a_k = n \cdot (a_1 + \ldots + a_k) \,\vdots\, (a_1 + \ldots + a_k).$$

13.13 Teisendame vajalikku avaldist ülesandes antud võrduse abil:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot \frac{1}{y} + x \cdot f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Me peame tõestama, et viimane tulemus võrdub avaldisega

$$\frac{f(x)y - xf(y)}{y^2} = f(x) \cdot \frac{1}{y} - \frac{x \cdot f(y)}{y^2}.$$

Niisiis tuleb tõestada, et

$$x \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{x \cdot f(y)}{y^2}$$

ehk

$$x \cdot \left(f\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{f(y)}{y^2}\right) = 0. \tag{13.1}$$

Võttes ülesandes antud seoses $x = \frac{1}{y}$, saame

$$f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y + \frac{1}{y} \cdot f(y).$$

Teisest küljest, võttes ülesande seoses $x = y = 1$, saame $f(1) = f(1) + f(1)$, millest $f(1) = 0$. Seega ka $f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = 0$, kust omakorda järeldub

$$f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y + \frac{1}{y} \cdot f(y) = 0.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled y-ga ja korrutades x-ga, saamegi vajaliku võrduse (13.1).