11. Mitme muutuja polünoomid ja avaldised

Definitsioon 11.1 *(Mitme muutuja) üksliikmeks* nimetame avaldist, kus on korrutatud arvuline kordaja ning muutujate naturaalarvulised astmed. *Üksliikme astmeks* nimetame temasesinevate muutujate astmete summat.

■ **Näide 11.1** $7xy$ on 2. astme üksliige, $\pi x^2 y^6 z$ aga 6. astme üksliige. ■

Definitsioon 11.2 *Mitme muutuja polünoomiks* ehk *hulkliikmeks* nimetame mitme muutuja üksliikmete summat. Mitme muutuja polünoomi *astmeks* nimetame temas esinevate üksliikmete astmete maksimumi.

■ **Näide 11.2** $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ on 3. astme hulkliige, $2x^6y^2 + 5x^3z^2 - 4yz - 6x + 3$ aga 8. astme hulkliige. ■

Põhitehted – liitmine, lahutamine ja korrutamine – toimuvad ühe ja mitme muutuja polünoomide korral analoogiliselt. Koondamisel loetakse sarnasteks need üksliikmed, milles esinevad samad muutujad vastavalt samadel astmetel.

■ **Näide 11.3**

$$(x+y+z)(x-y-z) = x^2 - xy - xz + xy - y^2 - yz + xz - yz - z^2 = z^2 - y^2 - z^2 - 2yz.$$

■

11.1 Mitme muutuja polünoomide tegurdamine

Mite muutuja polünoomide jagamisel pole jääk üldjuhul üheselt määratav, nii et jäägiga jagamist hästi defineerida ei saa. Küll aga võime rääkida mitme muutuja polünoomide jagumisest ja tegurdamisest.

Definitsioon 11.3 Ütleme, et mitme muutuja polünoom $P(x,y,\ldots)$ *jagub* polünoomiga $Q(x,y,\ldots)$ ja kirjutame $P(x,y,\ldots) \vdots Q(x,y,\ldots)$, kui leidub selline polünoom $S(x,y,\ldots)$, et

$$P(x,y,\ldots) = S(x,y,\ldots) \cdot Q(x,y,\ldots).$$

Sama seose kohta ütleme ka, et polünoom $Q(x,y,\ldots)$ *jagab* polünoomi $P(x,y,\ldots)$, ja kirjutame $Q(x, y, \ldots) \mid P(x, y, \ldots)$.

Kahe muutuja polünoomide jaguvuse uurimisel on kasulik teada seost $x^n - y^n \vdots x - y$. Selle tõestamiseks toome ilmutatult ära vastava jagatispolünoomi:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}). \qquad (11.1)$$

Tõepoolest, lahti korrutades võime kontrollida, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) &= \\ x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + x^3y^{n-3} + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} &- \\ - x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ldots - x^3y^{n-3} - x^2y^{n-2} - xy^{n-1} - y^n &= x^n - y^n.\end{aligned}$$

Valemi (11.1) saame üldistada suvalisele kahe muutuja polünoomile, mis esitub kujul $P(x) - P(y)$.

Teoreem 11.1 Olgu $P(x)$ suvaline reaalarvuliste kordajatega ühe muutuja polünoom. Kahe muutuja polünoom $P(x) - P(y)$ jagub polünoomiga $x - y$.

Tõestus. Olgu

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

ja tähistame polünoome, mis tekivad $x^k - y^k$ jagamisel polünoomiga $x - y$, vastavalt $P_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Siis

$$\begin{aligned}P(x) - P(y) &= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) - (a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1y + a_0) = \\ &= a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \ldots + a_1(x-y) = \\ &= a_n(x-y)P_n(x,y) + a_{n-1}(x-y)P_{n-1}(x,y) + \ldots + a_1(x-y)P_1(x,y) = \\ &= (x-y)(a_nP_n(x,y) + a_{n-1}P_{n-1}(x,y) + \ldots + a_1P_1(x,y)).\end{aligned}$$

□

Juhtudel $n = 2$ ja $n = 3$ saame võrdusest (11.1) tuttavad valemid

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y), \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2).\end{aligned}$$

Kasulik on teada võrdust (11.1) erijuhul $y = 1$:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

Muidugi võime avaldises $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1$ ära tunda geomeetrilise jada summa ja kasutada valemit

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

aga siis tuleb lisaks ettevaatlik olla juhul $x = 1$, mis annab jagamise nulliga.

Kas midagi sarnast kehtib ka polünoomide $x^n + y^n$ jaoks? Jah, kuid mitte kõigi, vaid ainult paaritute n väärtuste korral. Teeme polünoomis $x^n + y^n$ muutujavahetuse $y = -z$, misjärel saame

$$x^n + y^n = x^n + (-z)^n = x^n - z^n,$$

see polünoom aga jagub teoreemi 11.1 põhjal polünoomiga $x - z = x + y$. Analoogiliselt võrduse (11.1) tõestusega saame tekkiva jagatise ka ilmutatult leida:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}) . \qquad (11.2)$$

Harjutus 11.1 Tõesta võrdus (11.2) paaritute n väärtuste jaoks lahtikorrutamise teel.

Võrduse (11.2) puhul on jälle olulised erijuhud $n = 3$ ja $y = 1$:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) ,$$
$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \ldots + x^2 - x + 1) .$$

Teoreemist 11.1 saame olulise järelduse ka täisarvuliste kordajatega polünoomide jaoks.

Teoreem 11.2 Olgu P täisarvuliste kordajatega polünoom. Suvaliste täisarvude k ja ℓ korral jagub arv $P(k) - P(\ell)$ arvuga $k - \ell$.

Tõestus. Teoreemist 11.1 teame, et polünoom $P(x) - P(y)$ jagub kaksliikmega $x - y$. Lisaks on lihtne näha, et kui P on täisarvuliste kordajatega, siis on täisarvuliste kordajatega ka jagatispolünoom. Tõepoolest, valemis (11.1) ja teoreemi 11.1 tõestuses kasutasime jagatispolünoomide avaldamiseks ainult liitmist, lahutamist ja korrutamist, need operatsioonid aga ei vii meid täisarvude vallast välja.

See tähendab, et leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $Q(x, y)$ nii, et kehtib polünoomide võrdus

$$P(x) - P(y) = Q(x, y) \cdot (x - y) .$$

Asendades $x = k$ ja $y = \ell$ näeme, et kehtib täisarvude võrdus

$$P(k) - P(\ell) = Q(k, \ell) \cdot (k - \ell) ,$$

järelikult jagub arv $P(k) - P(\ell)$ arvuga $k - \ell$, kusjuures jagatis on $Q(k, \ell)$. □

Ülesanded

Ülesanne 11.1 (Piirkonnavoor 2001, 12. klass) Reaalarvude a, b ja c korrutis on 1 ning nende arvude summa on võrdne nende pöördarvude summaga. Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

Ülesanne 11.2 (Kevadine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kas jadas (a_n) üldliikmega $a_n = n^3 - (2n+1)^2$ leidub liige, mis jagub 2006-ga?

Ülesanne 11.3 (Sügisene lahtine võistlus 2010, vanem rühm) Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mis rahuldab tingimust $P(2010) = P(201) = 2010$.

a) Kas on võimalik, et $P(2011) = 2011$?

b) Milline on vähim võimalik positiivne $P(2011)$ väärtus?

Ülesanne 11.4 (Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm)

a) Kas leidub selline täisarv c ja täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(c) \neq c$, aga $P(P(c)) = c$?

b) Kas leidub selline täisarv c ja täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(c) \neq c$ ja $P(P(c)) \neq c$, aga $P(P(P(c))) = c$?

Ülesanne 11.5 (Lõppvoor 2023, 12. klass) Olgu $P(x)$ polünoom astmega 2023, kus kõik kordajad on nullid ja ühed, kusjuures $P(0) = 1$. Tõesta, et kõik polünoomi $P(x)$ reaalarvulised juured on väiksemad kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vaata ka ülesannet 22.12.

Lahendused

11.1 Korrutades võrduse

$$a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

vasaku poole 1-ga ning parema poole sellega võrdse suurusega abc, saame

$$a+b+c = bc+ca+ab\,.$$

Võttes veelkord arvesse, et $abc = 1$, saame viimase võrduse teisendada samaväärsele kujule

$$\begin{aligned} a+b+c-bc-ca-ab &= 0\,,\\ -1+a+b+c-bc-ca-ab+abc &= 0\,,\\ (a-1)(b-1)(c-1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Viimane võrdus aga kehtib parajasti siis, kui vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

11.2 Vastus: jah.

Paneme tähele, et $2006 = 17\cdot 118$, $a_2 = 2^3-5^2 = -17$ ja $a_7 = 7^3-15^2 = 118$. Näitame, et iga täisarvu $i \geqslant 0$ korral $a_{2+17i} \vdots 17$ ja $a_{7+118i} \vdots 118$. Tõepoolest, kuna jada (a_n) üldliige on täisarvuliste kordajatega polünoom, siis teoreemi 11.2 põhjal $a_{2+17i} - a_2 \vdots (2+17i-2)$ ehk $a_{2+17i} - a_2 \vdots 17i$. Et aga $a_2 = -17$, järeldubki siit, et $a_{2+17i} \vdots 17$. Seose $a_{7+118i} \vdots 118$ tõestus on analoogiline.

Jääb üle näidata, et leidub niisugune indeks n, mis avaldub mingite mittenegatiivsete i ja j korral kujul $n = 2+17i = 7+118j$. Teisisõnu me peame mittenegatiivsetes täisarvudes lahendama võrrandi

$$i = \frac{5+118j}{17}\,.$$

Proovides järjest läbi väärtusi $j = 0, 1, 2, \ldots$ leiame, et sobib $j = 5$, mis annab $i = 35$ ja $n = 597$.

Tõepoolest, $a_{597} = 211348148 = 2006\cdot 105358$.

Arvutiülesanne 11.1 Ülesandes 11.2 pole $n = 597$ vähim võimalik lahend. Leia arvuti abil vähim positiivne n väärtus, mille korral $a_n \vdots 2006$.

11.3 Vastus: a) ei, b) 200.

a) Oletame, et $P(2011) = 2011$ on võimalik. Võtame teoreemis 11.2 $k = 2011$ ja $\ell = 201$. Siis $P(k) - P(\ell) = 2011 - 2010 = 1$, aga $k - \ell = 2011 - 201 = 1810$. Kuna $1 \not\vdots 1810$, ei saa võrdus $P(2011) = 2011$ kehtida.

b) Sama moodi nagu a)-osas võtame teoreemis 11.2 arvud $k = 2011$ ja $\ell = 201$. Siis peab kehtima seos $P(2011) - P(201) \vdots 2011 - 201$ ehk $P(2011) - 2010 \vdots 1810$. Vähim positiivne $P(2011)$ väärtus, mille puhul see seos kehtida saab, on 200.

Jääb üle konstrueerida täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille puhul kehtivad kõik vajalikud võrdused, st

$$\begin{aligned} P(201) &= 2010\,, \\ P(2010) &= 2010\,, \\ P(2011) &= 200\,. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et 201 ja 2010 on polünoomi $P(x) - 2010$ juurteks, seega peab see polünoom jaguma lineaarpolünoomidega $x - 201$ ja $x - 2010$. Järelikult peab polünoom $P(x) - 2010$ esituma kujul $(x - 201)(x - 2010)Q(x)$ mingi täisarvuliste kordajatega polünoomi $Q(x)$ jaoks. Asendame $x = 2011$ ja saame

$$\begin{aligned} -1810 = 200 - 2010 = P(2011) - 2010 = \\ = (2011 - 201)(2011 - 2010) \cdot Q(2011) = 1810 \cdot Q(2011)\,. \end{aligned}$$

Niisiis võime $Q(x)$ kohale võtta suvalise täisarvuliste kordajatega polünoomi, mille jaoks $Q(2011) = -1$. Kõige lihtsam on valida konstantne polünoom $Q(x) \equiv -1$, mis annab $P(x) = -x^2 + 2211x - 402000$.

11.4 Vastus: a) jah; b) ei.

a) Sobivaid valikuid polünoomi P ja täisarvu c jaoks on palju. Näiteks võime võtta $P(x) = -x^2 + 1$ ja $c = 1$, siis $P(1) = -1^2 + 1 = 0$ ja $P(P(1)) = P(0) = -0^2 + 1 = 1$. Samuti sobivad kõik polünoomid kujul $P(x) = -x + b$ suvalise täisarvu b jaoks ja $c \neq \frac{b}{2}$.

b) Teoreemist 11.2 teame, et kõigi täisarvude k ja ℓ puhul kehtib $P(k) - P(\ell) \vdots k - \ell$. Siit järeldub, et kui $P(k) \neq P(\ell)$, siis $|P(k) - P(\ell)| \geqslant |k - \ell|$.

Eelduse põhjal $P(P(P(c))) = c$, aga $P(P(c)) \neq c$, seega $P(P(c)) \neq P(P(P(c)))$. Ülaltehtud järelduse põhjal saame $|P(P(c)) - P(P(P(c)))| \geqslant |P(c) - P(P(c))|$ ehk $|P(P(c)) - c| \geqslant |P(c) - P(P(c))|$.

Paneme tähele, et ka $P(c) \neq P(P(c))$, sest kui kehtiks $P(c) = P(P(c))$, peaks kehtima ka $P(P(c)) = P(P(P(c))) = c$, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult $|P(c) - P(P(c))| \geqslant |c - P(c)|$.

Kuna $P(P(P(c))) = c$, siis ka $P(P(P(P(c)))) = P(c)$, niisiis eelduse järgi saame $P(P(P(c))) \neq P(P(P(P(c))))$ ja järelikult kehtib ka

$$\begin{aligned} |c - P(c)| &= |P(P(P(c))) - P(P(P(P(c))))| \\ &\geqslant |P(P(c)) - P(P(P(c)))| = |P(P(c)) - c|\,. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame võratuste ahela

$$|P(P(c)) - c| \geqslant |P(c) - P(P(c))| \geqslant |c - P(c)| \geqslant |P(P(c)) - c|.$$

Järelikult kehtivad kõigis võrratustes tegelikult võrdused, st

$$|P(P(c)) - c| = |P(c) - P(P(c))| = |c - P(c)|.$$

See tähendab, et arvud c, $P(c)$ ja $P(P(c))$ asuvad arvteljel paarikaupa üksteisest sama kaugel. See on võimalik ainult siis, kui kõik need kolm arvu on võrdsed, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

11.5 Kõigepealt paneme tähele, et kuna $1 < \sqrt{5}$, siis $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Teiseks kulub hilisemas tõestuses ära tähelepanek, et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ on üks polünoomi $x^2 - x - 1$ kahest juurest.

Uurime polünoomi $P(x)$. Kuna kõik tema kordajad on mittenegatiivsed ja vabaliige on $P(0) = 1$, siis annab ta mittenegatiivsete x-ide korral alati positiivseid väärtusi. Muuhulgas ei saa polünoomil $P(x)$ olla mittenegatiivseid juuri.

Jääb üle vaadelda negatiivset juhtu. Tõestame, et iga $x_0 \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ korral kehtib samuti võrratus $P(x_0) > 0$. Selleks defineerime kõigepealt polünoomi

$$Q(x) = x^{2023} + x^{2021} + x^{2019} + \ldots + x^5 + x^3 + x + 1,$$

st polünoomis Q on kõigi paaritute astmetega üksliikmete kordaja 1 ning paarisastmetega üksliikmete kordaja 0, välja arvatud vabaliige, mis on samuti 1. Paneme tähele, et kehtib võrratus

$$P(x_0) \geqslant Q(x_0).$$

Tõepoolest, kuna $x_0 < 0$, kehtib võrratus $x_0^n < 0$, kui n on paaritu, ja $x_0^n > 0$, kui n on paaris. Avaldisest $P(x_0)$ paarisastmetega liikmete ärajätmisel ja paaritu astmega liikmete lisamisel saab avaldise väärtus aga ainult väheneda.

Ülesande lahenduse lõpetamiseks piisab seega näidata, et $Q(x_0) > 0$. Teisendame $Q(x_0)$ avaldist:

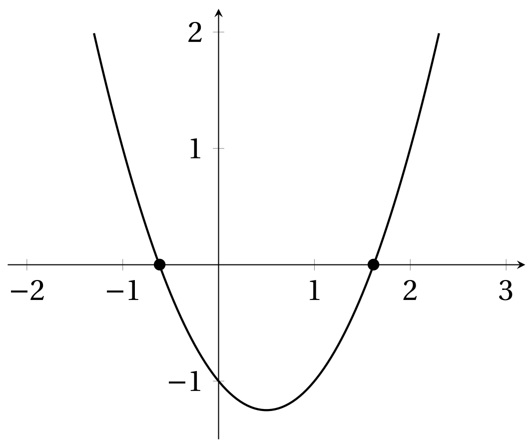
$$\begin{aligned}
Q(x_0) &= x_0^{2023} + x_0^{2021} + x_0^{2019} + \ldots + x_0^5 + x_0^3 + x_0 + 1 = \\
&= x_0(x_0^{2022} + x_0^{2020} + x_0^{2018} + \ldots + x_0^4 + x_0^2 + 1) + 1 = \\
&= x_0((x_0^2)^{1011} + (x_0^2)^{1010} + (x_0^2)^{1009} + \ldots + (x_0^2)^2 + (x_0^2)^1 + 1) + 1 = \\
&= x_0 \cdot \frac{(x_0^2)^{1012} - 1}{x_0^2 - 1} + 1 = x_0 \cdot \frac{x_0^{2024} - 1}{x_0^2 - 1} + 1.
\end{aligned}$$

(Teisendamise juures oli oluline, et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} > -1$, seega $x_0 \in (-1; 0)$, mistõttu $x_0^2 \neq 1$ ja meil ei teki jagamist 0-ga.)

Nüüd teisendame tõestatava võrratuse $Q(x_0) > 0$ samaväärsele kujule, arvestades, et $x_0 < 0$ ja $x_0^2 - 1 < 0$:

$$x_0 \cdot \frac{x_0^{2024} - 1}{x_0^2 - 1} + 1 > 0\,,$$
$$x_0 \cdot \frac{x_0^{2024} - 1}{x_0^2 - 1} > -1\,,$$
$$\frac{x_0^{2024} - 1}{x_0^2 - 1} < \frac{-1}{x_0}\,,$$
$$x_0^{2024} - 1 > \frac{-x_0^2 + 1}{x_0}\,,$$
$$x_0^{2024} > \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0}\,.$$

Viimase võrratuse tõestamiseks näitame, et $x_0^{2024} > 0 \geqslant \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0}$. Tõepoolest, kuna $x_0 < 0$ ja 2024 on paariarv, peab kehtima võrratus $x_0^{2024} > 0$. Võrratuse $0 \geqslant \frac{-x_0^2 + x_0 + 1}{x_0}$ tõestamiseks piisab, kui näitame, et $-x_0^2 + x_0 + 1 \geqslant 0$ ehk $x_0^2 - x_0 - 1 \leqslant 0$. Nüüd kulub ära tähelepanek, et polünoomi $x^2 - x - 1$ juured on $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Skitseerime funktsiooni $x^2 - x - 1$ graafiku:



Näeme, et piirkonnas $x_0 \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ kehtib tõepoolest võrratus $x_0^2 - x_0 - 1 \leqslant 0$, mis lõpetab ülesande väite tõestuse.

Arvutiülesanne 11.2 Uuri arvuti abil funktsioonide $x^3 + x + 1$, $x^5 + x^3 + x + 1$, $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ jne graafikuid. Kas ülesande 11.5 konstandi $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ asemele saaks valida mõne väiksema reaalarvu nii, et ülesande väide jääks endiselt kehtima?

11.2 Mitme muutuja avaldiste teisendamine

Vahel esineb matemaatikavõistlustel ülesandeid, kus on antud mitmest muutujast sõltuv avaldis ning tuleb tõestada mingi väide tema väärtuse kohta. Kuigi niisuguse avaldise lahtikorrutamine võib tunduda hirmutav, on see sageli siiski sihileviiv lähenemine.

Tuleb lihtsalt rahulikuks jääda ja kõik teisendused mitu korda üle kontrollida, et vigu sisse ei lipsa!

Ülesanne 11.6 (Piirkonnavoor 2002, 9. klass) Olgu x, y ja z mistahes kolm erinevat reaalarvu. Näita, et

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = -1\,.$$

Lahendus. Viime võrduse vasaku poole murrud ühisele nimetajale ja teisendame:

$$\begin{aligned}
&\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = \\
&= \frac{x(y+z)(y-z) + y(z+x)(z-x) + z(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \\
&= \frac{x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)}{yx^2 - zx^2 - xyz + xz^2 - xy^2 + xyz + zy^2 - yz^2} = \\
&= \frac{xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2}{yx^2 - zx^2 + xz^2 - xy^2 + zy^2 - yz^2} = \\
&= \frac{-yx^2 + zx^2 - xz^2 + xy^2 - zy^2 + yz^2}{yx^2 - zx^2 + xz^2 - xy^2 + zy^2 - yz^2} = -1\,.
\end{aligned}$$

Keerukamate avaldiste lihtsustamisel on vahel kasu mõnede standardsete seoste äratundmisest. Veendu järgmise harjutuse võrdustes iseseisvalt vastavate poolte lahtikorrutamise teel.

Harjutus 11.2 Näita, et kehtivad võrdused

1. $(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz,$
2. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$
3. $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz,$
4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$

Ülesanded

Ülesanne 11.7 (Sügisene lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Kahe nullist erineva reaalarvu summa on 1, samade arvude pöördarvude summa aga -3. Leia algse kahe reaalarvu kuupide summa.

Ülesanne 11.8 (Piirkonnavoor 2018, 9. klass) Tõesta, et kui a, b ja c on sellised positiivsed arvud, et $abc = 1$, siis

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1\,.$$

Ülesanne 11.9 (Lõppvoor 2005, 10. klass) Olgu a, b ja c sellised reaalarvud, et

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1\,.$$

Tõesta, et

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0\,.$$

Ülesanne 11.10 (Piirkonnavoor 2008, 10 klass; sügisene lahtine võistlus 1997, noorem rühm) Olgu a ja b sellised nullist erinevad reaalarvud, et $a+b \neq 0$. Leia võrrandi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

kõik lahendid.

Ülesanne 11.11 (Lõppvoor 2023, 9. klass) Olgu antud niisugused arvud x, y, z, et

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}\,.$$

Tõesta, et ka

$$\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}\,.$$

Ülesanne 11.12 (Piirkonnavoor 1996, 11. klass) Olgu $a + \frac{1}{a} = 10$. Leia $a^2 + \frac{1}{a^2}$ ja $a^3 + \frac{1}{a^3}$.

Ülesanne 11.13 (Piirkonnavoor 2005, 11. klass) Olgu a, b ja c sellised nullist erinevad arvud, et $a+b+c=0$. Leia avaldise

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$$

väärtus.

Ülesanne 11.14 (Lõppvoor 2015, 10. klass) Olgu x, y, z sellised reaalarvud, et $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=11$ ja $xyz=3$. Leia $x^3+y^3+z^3$.

Ülesanne 11.15 (Lõppvoor 2017, 12. klass) Reaalarvud x, y ja z rahuldavad tingimusi $x+y+z=4$ ja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$. Leia avaldise $x^3+y^3+z^3+xyz$ suurim ja vähim võimalik väärtus.

Ülesanne 11.16 (Talvine lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Reaalarvud a ja b on sellised, et $a^3+b^3=3$ ja $a^9+b^9=9$. Leia avaldise a^6+b^6 väärtus.

Ülesanne 11.17 (Lõppvoor 2004, 10. klass) Reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrdusi $a^2+b^2+c^2=1$ ja $a^3+b^3+c^3=1$. Leia summa $a+b+c$ väärtus.

Vaata ka ülesannet 15.29.

Lahendused

11.7 Vastus: 2.

Tähistame antud reaalarve x ja y. Siis ülesande tingimuste põhjal $x+y=1$ ja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-3$. Teisest võrdusest saame ühisele nimetajale viies $\frac{x+y}{xy}=-3$ ehk $xy=\frac{x+y}{-3}=-\frac{1}{3}$. Nüüd saame avaldada otsitava kuupide summa:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=1\cdot\left(1^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=2\,.$$

11.8 Viime tõestatava võrduse vasaku poole murrud ühisele nimetajale. Saadava murru lugeja on

$$\begin{aligned}
&a(1+b+bc)(1+c+ca)+b(1+a+ab)(1+c+ca)+c(1+a+ab)(1+b+bc)=\\
&=a+ac+a^2c+ab+abc+a^2bc+abc+abc^2+a^2bc^2+\\
&+b+bc+abc+ab+abc+a^2bc+ab^2+ab^2c+a^2b^2c+\\
&+c+bc+bc^2+ac+abc+abc^2+abc+ab^2c+ab^2c^2=\\
&=3(a+b+c+ab+bc+ca)+ab^2+bc^2+a^2c+6\,,
\end{aligned}$$

kus viimases võrduses oleme kasutanud eeldust $abc=1$ (st muuhulgas $a^2bc=a$, $a^2bc^2=ac$ jne).

Saadava murru nimetaja on aga

$$\begin{aligned}
&(1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca)=\\
&=1+c+ac+b+bc+abc+bc+bc^2+abc^2+\\
&+a+ac+a^2c+ab+abc+a^2bc+abc+abc^2+a^2bc^2+\\
&+ab+abc+a^2bc+ab^2+ab^2c+a^2b^2c+ab^2c+ab^2c^2+a^2b^2c^2=\\
&=3(a+b+c+ab+bc+ca)+ab^2+bc^2+a^2c+6\,.
\end{aligned}$$

Niisiis on saadud murru lugeja ja nimetaja võrdsed, mistõttu murru väärtus on 1.

11.9 Viime antud võrduse vasakul poolel murrud ühisele nimetajale ja teisendame:

$$\begin{gathered}
\frac{a(c+a)(a+b)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=1\\
a(c+a)(a+b)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(c+a)=(b+c)(c+a)(a+b)\\
a^3+a^2b+a^2c+abc+b^3+ab^2+b^2c+abc+c^3+ac^2+bc^2+abc=\\
=abc+b^2c+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+a^2c+abc\\
a^3+b^3+c^3+abc=0\,.
\end{gathered}$$

Sama moodi viime ühisele nimetajale tõestatava võrduse vasaku poole. Saadava murru nimetaja on samuti $(b+c)(c+a)(a+b)$, mis peab eelduse põhjal 0-st erinema. Teisendame saadava murru lugejat:

$$\begin{gathered}a^2(c+a)(a+b)+b^2(b+c)(a+b)+c^2(b+c)(c+a)=\\ a^4+a^3b+a^3c+a^2bc+b^4+ab^3+b^3c+ab^2c+c^4+ac^3+bc^3+abc^2=\\ (a^4+ab^3+ac^3+a^2bc)+(a^3b+b^4+bc^3+ab^2c)+(a^3c+b^3c+c^4+abc^2)=\\ a(a^3+b^3+c^3+abc)+b(a^3+b^3+c^3+abc)+c(a^3+b^3+c^3+abc)=\\ (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)=0\,,\end{gathered}$$

sest $a^3+b^3+c^3+abc=0$. Järelikult peab kogu murru väärtus samuti 0 olema.

11.10 Vastus: $x=-a$ ja $x=-b$.

Teisendame ülesande võrrandit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}&=\frac{1}{a+b+x}\,,\\ \frac{bx+ax+ab}{abx}&=\frac{1}{a+b+x}\,,\\ (a+b+x)(bx+ax+ab)&=abx\,,\\ abx+a^2x+a^2b+b^2x+abx+ab^2+bx^2+ax^2+abx&=abx\,,\\ a^2x+a^2b+b^2x+ab^2+bx^2+ax^2+2abx&=0\,.\end{aligned}$$

Saadud võrrandi vasakus pooles tunneme ära ülesande 11.2 esimese osa avaldise. Seega võime võrrandi viia kujule

$$(a+b)(a+x)(b+x)=0\,.$$

Kuna eelduse põhjal $a+b\neq 0$, peab kehtima kas $a+x=0$ või $b+x=0$. Siit saame kaks võimalikku lahendit $x=-a$ ja $x=-b$; lihtne kontroll näitab, et mõlemad lahendid sobivad.

11.11 Täpselt sama moodi kui ülesande 11.10 lahenduses saame näidata, et antud võrdus on (eeldusel $x, y, z, x+y+z\neq 0$) samaväärne võrdusega

$$(x+y)(y+z)(x+z)=0\,.$$

Järelikult peab kehtima vähemalt üks võrdustest $x=-y$, $y=-z$ ja $x=-z$.

Juhul $x=-y$ saame $\frac{1}{x^{2023}}=-\frac{1}{y^{2023}}$ ja $x^{2023}=-y^{2023}$, seega tõestatav võrdus kehtib, sest tema mõlemad pooled on võrdsed suurusega $\frac{1}{z^{2023}}$. Ülejäänud juhud vaatame läbi analoogiliselt.

11.12 Vastus: 98 ja 970.

Antud võrdust ruutu tõstes saame

$$100=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=a^2+2+\frac{1}{a^2}\,,$$

järelikult $a^2+\frac{1}{a^2}=98$.

Selleks, et tekiksid liikmed a^3 ja $\dfrac{1}{a^3}$, võime omavahel korrutada näiteks avaldised $a+\dfrac{1}{a}$ ja $a^2+\dfrac{1}{a^2}$:

$$10\cdot 98 = \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) = a^3+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}.$$

Kuna $a+\dfrac{1}{a}=10$, saame nüüd $a^3+\dfrac{1}{a^3}=10\cdot 98-10=970$.

11.13 Vastus: -3.

Sellele ülesandele saab anda elegantse lahenduse, kui näha läbi murdude õige grupeerimine. Nimelt kehtivad võrdused

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}=\frac{-b}{b}=-1\,,$$

sest ülesande tingimuste põhjal $a+c=-b$. Sama moodi tõestame, et $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=-1$ ja $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=-1$, niisiis on ülesande avaldise väärtus kokku -3.

Kui seda kavalat ideed ei tule, viib sihile ka kõigi murdude kokkuliitmine, kuigi lahendussamme tuleb teha rohkem. Antud murdude summa viimine ühisele nimetajale annab

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{ca^2+cb^2+ab^2+ac^2+bc^2+ba^2}{abc}.$$

Saadud murdavaldise lugejas tunneme ära ühe osaavaldise harjutuse 11.2 osast 3, mille põhjal

$$ca^2+cb^2+ab^2+ac^2+bc^2+ba^2=\frac{(a+b+c)^2-a^3-b^3-c^3-6abc}{3}= \\ =\frac{-a^3-b^3-c^3-6abc}{3},$$

sest $a+b+c=0$.

Sama harjutuse 4. osa põhjal teame, et

$$a^3+b^3+b^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0\,,$$

järelikult $a^3+b^2+c^3=3abc$. Ülesande avaldise väärtuseks saame nüüd leida

$$\frac{ca^2+cb^2+ab^2+ac^2+bc^2+ba^2}{abc}=\frac{-a^3-b^3-c^3-6abc}{3abc}=\frac{-3abc-6abc}{3abc}= \\ =\frac{-9abc}{3abc}=-3\,.$$

11.14 Vastus: 25.

Kasutame harjutuse 11.2 võrdusi, mille põhjal

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

ja

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)).$$

Nüüd saame ülesandes antud tingimuste põhjal leida

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}(1^2-11)=-5$$

ja

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=$$
$$=1\cdot(11-(-5))+3\cdot 3=16+9=25.$$

11.15 Vastus: ainus võimalik väärtus on 64.

Võrdusest $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ saame pärast vasaku poole ühisele nimetajale viimist ja teisendamist $3(xy+yz+z)=xyz$. Nüüd võime kasutada harjutuse 11.2 võrdusi, mille põhjal

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3+xyz&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+4xyz=\\&=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx))+4xyz=\\&=(x+y+z)((x+y+z)^2-xyz)+4xyz=\\&=4(4^2-xyz)+4xyz=4^3=64.\end{aligned}$$

11.16 Vastus: 5.

Kuidas avaldada antud avaldiste põhjal a^6+b^6? Vajalikud liikmed tekivad näiteks võrdust $a^3+b^3=3$ ruutu tõstes:

$$9=(a^3+b^3)^2=a^6+2a^3b^3+b^6.$$

Teisest küljest, kuivõrd $a^9=(a^3)^3$ ja $b^9=(b^3)^3$, saame kuupide summa valemist

$$9=a^9+b^9=(a^3+b^3)(a^6-a^3b^3+b^6)$$

ning kuna $a^3+b^3=3$, järeldub siit, et $a^6-a^3b^3+b^6=3$. Kokkuvõtteks oleme saanud kaks võrrandit, mida võime vaadelda süsteemina

$$\begin{cases}a^6+2a^3b^3+b^6=9\\ a^6-a^3b^3+b^6=3\end{cases}.$$

Korrutades teist võrrandit 2-ga ning liites esimesele on tulemuseks võrdus

$$3a^6+3b^6=15,$$

millest järeldub, et $a^6+b^6=5$.

11.17 Vastus: 1.

Vaatamata välisele sarnasusele teiste sama jaotise ülesannetega ei vii avaldiste teisendamine seekord sihile. Tegu on hoopis võrratuseülesandega!

Võrdusest $a^2+b^2+c^2=1$ järeldub, et $a^2,b^2,c^2\leqslant 1$ ehk $|a|,|b|,|c|\leqslant 1$.

Juhul kui muutujatest ühe (üldisust kitsendamata näiteks a) absoluutväärtus on 1, peavad ülejäänud muutujad olema nullid. Siis aga järeldub võrdusest $a^3 + b^3 + c^3 = 1$, et $a = 1$, mistõttu sel juhul $a + b + c = 1$.

Kui kõigi kolme muutuja absoluutväärtused on väiksemad kui 1, kehtivad võrratused

$$a^2 > |a^3|, \quad b^2 > |b^3| \quad \text{ja} \quad c^2 > |c^3|,$$

järelikult

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 > |a^3| + |b^3| + |c^3| \geqslant |a^3 + b^3 + c^3|.$$

Muuhulgas ei saa kehtida võrdus $a^3 + b^3 + c^3 = 1$, mistõttu see võimalus lahendeid juurde ei anna.

11.3 Homogeensed polünoomid

Vahel esinevad ülesannetes eritüüpi mitmemuutujapolünoomid (ja -võrrandid), mida saab taandada ühele muutujale. Üheks selliseks tüübiks on kahe muutuja homogeensed polünoomid. Tuletame meelde, et üksliikme astmeks nimetame tema muutujate astmete summat. Nüüd saame anda järgmise definitsiooni.

Definitsioon 11.4 Ütleme, et mitmemuutujapolünoom on *homogeenne*, kui tema kõik üksliikmed on sama astmega. Seda üksliikmete ühist astet nimetame ka vaadeldava homogeense polünoomi astmeks.

▪ **Näide 11.4** Polünoomid $x^3 + 5xy^2 - 3y^3$ ja $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ on vastavalt 3. ja 4. astme homogeensed polünoomid. Polünoom $x^2 + 3y - 1$ ei ole homogeenne, sest selles esineb nii 2., 1. kui 0. astme liikmeid. ▪

Homogeense polünoomi poolt nääratud võrrandi muutujate arvu saab alandada 1 võrra. Näiteks kui $P(a, b)$ on homogeenne n. astme kahe muutuja polünoom, siis võrrandi kujul

$$P(a, b) = 0$$

saame teisendada ühe muutuja polünoomiks, jagades mõlemad pooled läbi avaldisega b^n ning tehes muutujavahetuse $c = \dfrac{a}{b}$. Juht $b = 0$ tuleb muidugi eraldi läbi vaadata.

Ülesanne 11.18 (Lõppvoor 1994, 9. klass) Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral kehtib seos

$$2a^2b = a^3 + b^3.$$

Lahendus. Vastus: sobivad parajasti kõik täisarvude paarid (a, b), kus $a = b$.

Lahenduse võtme annab tähelepanek, et ülesande võrrand on homogeenne, st kõigi temas esinevate üksliikmete koguaste on sama (antud juhul 3). Nagu eelpool mainitud, saame homogeense kahemuutujavõrrandi lihtsasti teisendada ühemuutujavõrrandiks.

Kõigepealt paneme tähele, et kui $b = 0$, siis ka $a = 0$. Juhul $b \neq 0$ saame võrrandi mõlemad pooled jagada suurusega b^3 ja teha muutujavahetuse $c = \frac{a}{b}$:

$$\begin{aligned} 2\frac{a^2}{b^2} &= \frac{a^3}{b^3} + 1\,, \\ 2c^2 &= c^3 + 1\,, \\ 0 &= c^3 - 2c^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Ülesande lahendamiseks on vaja leida kõik saadud võrrandi ratsionaalarvulised lahendid.

Polünoomi $c^3 - 2c^2 + 1$ kordajate summa on 0, seega teoreemi 10.6 põhjal on 1 tema juureks (milles saab muidugi veenduda ka otse, arvutades, et $1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$). Niisiis saame selle polünoomi tegurdada, jagades teda polünoomiga $c - 1$:

$$\begin{array}{rrrl} c^3 & -2c^2 & & +1 = (c-1)(c^2-c-1) \\ -c^3 & +c^2 & & \\ \hline & -c^2 & & \\ & c^2 & -c & \\ \hline & & -c & +1 \\ & & c & -1 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

Võrrandi

$$(c-1)(c^2-c-1) = 0$$

lahend $c = 1$ tähendab $\frac{a}{b} = 1$ ehk $a = b$. Ülejäänud lahendid saavad pärineda ainult võrrandist

$$c^2 - c - 1 = 0\,,$$

aga selle lahendid $c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ pole ratsionaalarvud.

Kokkuvõtteks on lahenditeks parajasti kõik täisarvude paarid (a, b), kus $a = b$.

Veel ühte võtet, mida homogeensete polünoomide ja võrrandite puhul kasutada saab, demonstreerivad ülesanded 11.22 ja 2.8.

Ülesanded

Ülesanne 11.19 (Sügisene lahtine võistlus 2010, noorem rühm) Leia kõik reaalarvude paarid (a, b), mille korral $a + b = 1$ ning mis rahuldavad võrrandit $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$.

Ülesanne 11.20 (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Leia kõik sellised reaalarvude paarid (x, y), et

$$x^9 + 4x^6y + 6x^3y^2 + 4y^3 = 0\,.$$

Ülesanne 11.21 (Piirkonnavoor 2021, 11. klass) Kas leiduvad sellised täisarvud x ja y, mille korral

$$\frac{20}{x} + \frac{21}{y} = \frac{2021}{x+y}?$$

Ülesanne 11.22 (Piirkonnavoor 2014, 10. klass) Olgu x, y, z sellised nullist erinevad reaalarvud, et kehtib seos

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Leia avaldise $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ kõik võimalikud väärtused.

Vaata ka ülesannet 2.8.

Lahendused

11.19 Vastus: võimalikud lahendid on $(1;0)$, $(0;1)$ ja $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Selles ülesandes saab kasutada sarnast võtet nagu ülesande 11.18 lahenduseksi. Antud võrrand pole küll homogeenne, sest lahti korrutades jäävad vasakule poole 5. ja paremale poole 4. astme liikmed. Õnneks saame seose $a + b = 1$ abil selle võrrandi homogeenseks muuta, korrutades tema vasaku poole läbi 1-ga ning parema poole summaga $a + b$:

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)(a^3+b^3) &= (a^4+b^4)(a+b)\,,\\
a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5 &= a^5+a^4b+ab^4+b^5\,,\\
a^2b^3+a^3b^2 &= a^4b+ab^4\,.
\end{aligned}$$

Ühele muutujale üle minekuks tahaksime viimast võrrandit jagada b^5-ga, aga enne tuleb läbi vaadata võimalus $b = 0$. On lihtne näha, et sel juhul $a = 1$ ning ülesande võrdus kehtib, niisiis oleme saanud esimese lahendi.

Kui $b \neq 0$, saame võrrandi b^5-ga läbi jagada, teha muutujavahetuse $c = \frac{a}{b}$ ning teisendada tulemust:

$$\begin{aligned}
a^2b^3+a^3b^2 &= a^4b+ab^4\,,\\
\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3} &= \frac{a^4}{b^4}+\frac{a}{b}\,,\\
c^2+c^3 &= c^4+c\,,\\
0 &= c^4+c-c^3-c^2\,,\\
0 &= c(c^3+1-(c^2+c))\,,\\
0 &= c((c+1)(c^2-c+1)-(c+1)c)\,,\\
0 &= c(c+1)(c^2-2c+1)\,,\\
0 &= c(c+1)(c-1)^2\,.
\end{aligned}$$

Näeme, et c võimalikud väärtused on 0, -1 ja 1. Kui $c = 0$, siis $a = 0$, $b = 1$ ja vahetu kontroll näitab, et oleme leidnud teise lahendi.

Kui $c = -1$, siis $a = -b$. Võrdusest $a + b = 1$ järeldub nüüd, et $-b + b = 1$ ehk $0 = 1$, seega sellest variandist lahendeid ei tule.

Kui $c = 1$, siis $a = b$. Võrdusest $a + b = 1$ järeldub nüüd, et $a + a = 1$, kust $a = \frac{1}{2}$ ja $b = \frac{1}{2}$. Kontroll näitab, et

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3) = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$
$$a^4+b^4 = \frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8},$$

niisiis kehtib võrdus ka sel juhul ja oleme leidnud kolmanda lahendi.

11.20 Vastus: lahendiks sobivad parajasti kõik reaalarvupaarid kujul $\left(x, -\frac{x^3}{2}\right)$.

Ülesande võrrandis on tegemist kahemuutujapolünoomiga, milles iga üksliikme aste[1] on pealegi veel erinev (vastavalt 9, 7, 5 ja 3). Kas me saame seda polünoomi ja vastavat võrrandit kuidagi lihtsustada?

Osutub, et saame küll – nimelt on võimalik võrrand homogeenseks muuta. Paneme kõigepealt tähele, et muutuja x esineb ainult astmetena x^9, x^6 ja x^3 ehk $(x^3)^3$, $(x^3)^2$ ja $(x^3)^1$. See asjaolu viib mõttele kasutada muutujavahetust $z = x^3$, mille tulemusena saame võrrandi

$$z^3 + 4z^2y + 6zy^2 + 4y^3 = 0. \tag{11.3}$$

Võrrand (11.3) on homogeenne, st kõigi temas esinevate üksliikmete aste on sama (antud juhul 3). Sama moodi nagu ülesandes 11.18, saame niisuguse võrrandi lihtsasti ühemuutujavõrrandiks teisendada.

Paneme kõigepealt tähele, et võimalus $y = 0$ annab algse võrrandi lahendiks paari $(0,0)$. Kui $y \neq 0$, võime võrrandi (11.3) mõlemaid pooli jagada suurusega y^3, misjärel saame

$$\frac{z^3}{y^3} + 4\frac{z^2}{y^2} + 6\frac{z}{y} + 4 = 0$$

ehk pärast muutujavahetust $w = \frac{z}{y}$

$$w^3 + 4w^2 + 6w + 4 = 0.$$

Väärtused $w = -1, 0, 1$ ei sobi saadud võrrandi lahendiks, aga $w = -2$ annab $(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-2) + 4 = -8 + 16 - 12 + 4 = 0$. Tegurdame polünoomi $w^3 + 4w^2 + 6w + 4$, jagades ta läbi lineaarpolünoomiga $w + 2$:

$$\begin{array}{l}
w^3 + 4w^2 + 6w + 4 = (w+2)(w^2+2w+2) \\
\underline{-\,w^3 - 2w^2} \\
\qquad 2w^2 + 6w \\
\qquad \underline{-\,2w^2 - 4w} \\
\qquad\qquad 2w + 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2w - 4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

[1]Tuletame meelde, et üksliikme astmeks nimetame temas esinevate muutujate astmete summat.

Võrrandi $w^2+2w+2=0$ diskriminant $2^2-4\cdot 1\cdot 2$ on negatiivne, järelikult sellel võrrandil reaalarvulisi lahendeid ei ole. Niisiis jääbki ainsaks võimaluseks $w=-2$, millest saame omakorda $z=-2y$ ja $x^3=-2y$. Seega esituvad algse võrrandi kõik lahendid kujul $\left(x,-\dfrac{x^3}{2}\right)$ (ja muuhulgas sisaldub selles üldkujus ka lahend $(0,0)$).

11.21 Vastus: ei.

Teisendame ülesande võrrandit:

$$\begin{aligned}\frac{20}{x}+\frac{21}{y}&=\frac{2021}{x+y},\\ 20y(x+y)+21x(x+y)&=2021xy,\\ 20xy+20y^2+21x^2+21xy&=2021xy,\\ 21x^2-1980xy+20y^2&=0.\end{aligned}$$

Saadud võrrandi vasakul poolel on 2. astme homogeenne polünoom. Kuna ülesande avaldis pole üldse määratud, kui $y=0$, võime võrrandi mõlemad pooled y^2-ga läbi jagada ning teha muutujavahetuse $z=\dfrac{x}{y}$. Tulemuseks on ruutvõrrand

$$21z^2-1980z+20=0. \tag{11.4}$$

Kui ülesande võrrandil leiduks lahend täisarvudes, peaks saadud ruutvõrrandil olema ratsionaalarvuline lahend. Uurime võrrandi (11.4) diskriminanti ja näitame, et see ei ole täisruut. Teoreemi 24.1 põhjal järeldub siit, tema ruutjuur on irratsionaalne, mistõttu ka võrrandi (11.4) lahendid peavad olema irratsionaalsed.

Ruutvõrrandi (11.4) diskriminant on

$$1980^2-4\cdot 21\cdot 20=1980^2-1680=1980^2-1980+300=1980\cdot 1979+300.$$

Kuna $1980 \,\vdots\, 9$, jagub 9-ga ka korrutis $1980\cdot 1979$. Samas jagub 300 küll 3-ga, aga mitte 9-ga. Niisiis jagub ka kogu diskriminant 3-ga, aga mitte 9-ga. Järelikult ei saa ta olla täisruut, millest tulenebki, et ülesande võrrandil puuduvad täisarvulised lahendid.

11.22 Vastus: -1 ja 8.

Ülesandes on kolm muutujat, aga ainult kaks võrrandi kujul esitatud tingimust. Seda on enamasti muutujate väärtuste üheseks määramiseks liiga vähe (tavaliselt läheb vaja vähemalt sama palju võrrandeid kui on muutujaid).

Õnneks on ülesande võrrandid homogeensed[2] ja see asjaolu võimaldab vähendada muutujate arvu 1 võrra. Paneme tähele, et iga lahendi (x,y,z) korral on lahendiks ka (dx,dy,dz) suvalise $d\neq 0$ korral. See tähendab, et meil ei lähe lahendeid kaduma, kui me fikseerime ühe muutuja, näiteks x, suvaliseks mittenullkonstandiks, näiteks $x=1$. Ülesande võrdused omandavad siis kuju

$$\frac{1+y}{z}=y+z=\frac{z+1}{y}. \tag{11.5}$$

[2]Selles ülesandes pole formaalselt tegemist polünoomidega definitsioonide 11.1 ja 11.2 mõttes, aga neid definitsioone saab üldistada juhule, kus üksliikmetes on lubatud ka negatiivsete astmetega muutujaid. Ülesande 11.22 avaldised on siis 0. astme, ülesande 11.21 avaldised aga (-1). astme homogeensed polünoomid.

Esimeseses võrdusest järeldub $1+y=yz+z^2$, mida saame vaadelda ruutvõrrandina muutuja z suhtes: $z^2+yz-y-1=0$. Lahendame selle võrrandi:

$$z=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+y+1}=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}=-\frac{y}{2}\pm\left(\frac{y}{2}+1\right),$$

kust saame $z_1=1$ ja $z_2=-y-1$.

Esimesel juhul saame võrduste ahela (11.5) teisest võrdusest $y+1=\frac{2}{y}$ ehk $y^2+y-2=0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $y_1=1$ ja $y_2=-2$. Kokkuvõttes oleme ülesande võrranditele saanud kaks lahendit $(1;1;1)$ ja $(1;-2;1)$ (ehk $(d;d;d)$ ja $(d;-2d;d)$ koos viimase lahendi tsükliliste ümberpaigutustega). Need lahendid annavad nõutud avaldise väärtusteks vastavalt

$$\frac{(1+1)(1+1)(1+1)}{1\cdot1\cdot1}=8 \quad \text{ja} \quad \frac{(1-2)(-2+1)(1+1)}{1\cdot(-2)\cdot1}=-1\,.$$

Kui $z=-y-1$, saame võrduste ahela (11.5) teisest võrdusest $-1=\frac{-y}{y}$. Niisiis on lahenditeks ka kõik kolmikud kujul $(1;y;-y-1)$ (ehk üldkujul $(d;dy;-dy-d)$ koos tsükliliste ümberpaigutustega). See võimalus annab nõutud avaldise väärtuseks

$$\frac{(1+y)(y-y-1)(-y-1+1)}{1\cdot y\cdot(-y-1)}=\frac{(1+y)(-1)(-y)}{y\cdot(-y-1)}=-1\,.$$

Kokkuvõttes on ülesande avaldise võimalikud väärtused -1 ja 8.