11. Funktsioonide ja graafikute uurimine

Funktsioonide uurimise teema esineb piirkonna- ja lõppvoorudes sageli nö “õpikutüüpi” ülesannetes. Sellesse raamatusse püüdis autor koondada neist niisuguse valiku, millel on ka iseseisev matemaatiline sisu. Loomulikult leiab kogu koolitunnis omandatud teadmistepagas (tuletised, nullkohad, karvamine-kahanemine jne) ka nendes ülesannetes rohket rakendamist.

Samuti on kasu pöördfunktsiooni mõiste tundmisest. Nagu nimigi ütleb, “pöörab” see etteantud funktsiooni toime tagasi, st leiab igale väärtusele $f(x)$ vastava originaali x.

Definitsioon 11.1 Olgu antud funktsioon f määramispiirkonnaga X ning muutumispiirkonnaga Y. Ütleme, et g on funktsiooni f *pöördfunktsioon*, kui ta seab igale hulga Y elemendile vastavusse hulga X elemendi nii, et

$$\forall x \in X: \; g(f(x)) = x.$$

Niisugust funktsiooni g tähistatakse ka f^{-1}.

Nii näiteks on funktsiooni $f(x) = x^3$ pöördfunktsiooniks $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ning funktsiooni $f(x) = e^x$ pöördfunktsiooniks $f^{-1}(x) = \ln x$.

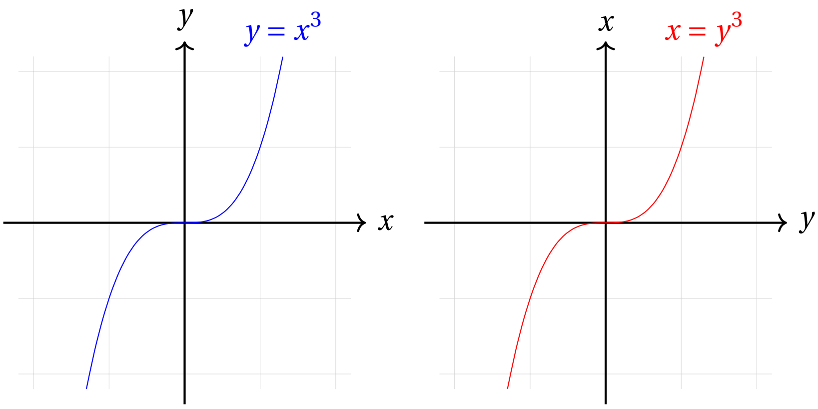
Pöördfunktsiooni leidmisega tuleb olla ettevaatlik juhul, kui antud funktsioon ei ole üksühene, st mõnel määramispiirkonna elemendil $y \in Y$ leidub mitu originaali.

Vaatleme näiteks funktsiooni $f(x) = x^2$. Sel juhul $f(2) = f(-2) = 4$. Kuna ka pöördfunktsioon peab rangelt võttes olema funktsioon ja tagastama ühel sisendil ainult ühe väljundi, pole $f^{-1}(4)$ võimalik defineerida nii, et definitsiooni 11.1 nõue oleks igal juhul täidetud. Kui määraksime, et $f^{-1}(4) = 2$, ei kehtiks definitsiooni 11.1 nõue $x = -2$ puhul, ja vastupidi.

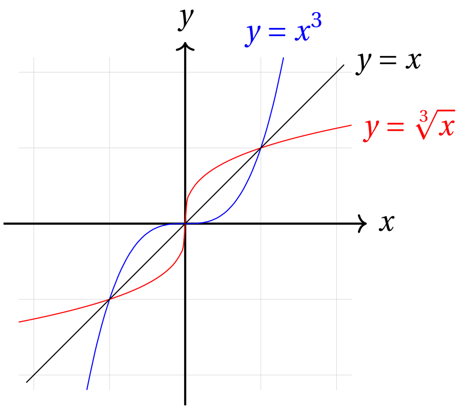
Funktsiooni $f(x) = x^2$ jaoks saame definitsioonile 11.1 vastava pöördfunktsiooni leida siis, kui vaatleme teda määramispiirkonna $X = \mathbb{R}$ asemel määramispiirkonnal $X = [0;\infty)$. Sel juhul on ruutfunktsiooni väärtuste originaalid üheselt määratud ning $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Kokkuvõtteks on pöördfunktsiooni leidumiseks tarvilik ja piisav, et antud funktsioon oleks oma määramispiirkonnas üksühene (st ei kujutaks kahte erinevat väärtust samaks väärtuseks). See omadus on automaatselt täidetud näiteks rangelt kasvavate ja rangelt kahanevate funktsioonide korral.

Funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni avaldiste ja graafikute vahel on huvitavad seosed. Nii f kui f^{-1} seavad omavahel vastavusse väärtused x ja $f(x)$, ainult et vastupidises suunas. Kui funktsioon f väljastab sisendil x väärtuse $f(x)$, siis f^{-1} väljastab sisendil $f(x)$ väärtuse x. See tähendab, et me saame funktsiooni f graafikust funktsiooni f^{-1} graafiku, kui sisendtelje x ja väljundtelje y rollid omavahel ära vahetame! Veelgi enam, kui funktsioon $y = f(x)$ on kirjeldatud mingi avaldisega, saame pöördfunktsiooni avaldise, kui vahetame omavahel muutujate rollid.



Pöördfunktsiooni graafiku tagasiviimine tavalisse teljestikku tähendab tema telgede tagasivahetamist, mis on samaväärne peegeldamisega telgedevahelise nurgapoolitaja ehk sirge $y = x$ suhtes. Niisiis saame kokkuvõtteks, et *funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on teineteise peegeldused sirgest* $y = x$.



Ülesanded

Ülesanne 11.1 (Lõppvoor 2016, 12. klass) Kas saab valida reaalarvud a, b, c ja d nii, et $a \neq 0$ ning funktsioonidel $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ja $y = ax^3 + bx^2 + cx + d + 4$ on kummalgi täpselt kaks erinevat nullkohta?

Ülesanne 11.2 (Lõppvoor 2001, 12. klass) Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x \end{cases}.$$

Ülesanne 11.3 (Lõppvoor 2014, 12. klass) Leia kõik reaalarvude paarid (x, y), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + \sin x = y \\ y + \sin y = x \end{cases}.$$

Ülesanne 11.4 (Lõppvoor 2012, 12. klass)

a) Kas leidub kõigi reaalarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis pole konstantselt null ja mille graafiku peegeldamisel y-telje suhtes saadakse selle funktsiooni tuletise graafik?

b) Kas leidub kõigi reaalarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis pole konstantselt null ja mille graafiku nihutamisel 1 ühiku võrra piki x-telge positiivses suunas saadakse selle funktsiooni tuletise graafik?

Ülesanne 11.5 (Lõppvoor 2006, 12. klass) Leia vähim võimalik tasandipunktide P ja Q vaheline kaugus, kui P asub funktsiooni $y = x$ graafikul ja Q funktsiooni $y = 2^x$ graafikul.

Ülesanne 11.6 (Lõppvoor 2010, 12. klass) Leia minimaalne kaugus kahe punkti vahel, millest üks asub funktsiooni $y = e^x$ ja teine funktsiooni $y = \ln x$ graafikul.

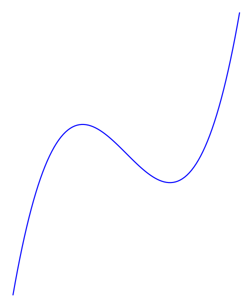
Ülesanne 11.7 (Lõppvoor 2003, 12. klass) Lahenda võrrand

$$\sqrt{x} = \log_2 x.$$

Lahendused

11.1 Vastus: jah, näiteks võime valida $a = 1, b = 0, c = -3, d = -2$.

Kasutame ära seda, et kuupfunktsiooni graafik näeb välja enam-vähem niisugune:



Otsime selliseid kordajaid a, b, c, d, et funktsiooni $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ekstreemumpunktide y-koordinaatide vahe oleks 4. Seejärel saame vabaliikme valikuga graafikut y-telje suunas liigutada nii, et maksimum- ja miinimumpunkt satuvad kordamööda x-teljele.

Valime kõigepealt $a = 1$ ja $b = d = 0$, st otsime (paaritut) kuupfunktsiooni kujul $x^3 + cx$. Leiame c nii, et selle funktsiooni maksimum ja miinimul realiseeruksid näiteks kohtadel $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Vaadeldava funktsiooni tuletis on $3x^2 + c$, mistõttu ekstreemumid realiseeruvad kohtadel, kus $3x^2 + c = 0$ ehk $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{3}}$.

Otsime c väärtust, mille korral $\pm\sqrt{-\frac{c}{3}} = \pm 1$; sobib $c = -3$. Asendades $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$ avaldisse $x^3 - 3x$ saame ekstreemumpunktide y-koordinaatideks vastavalt

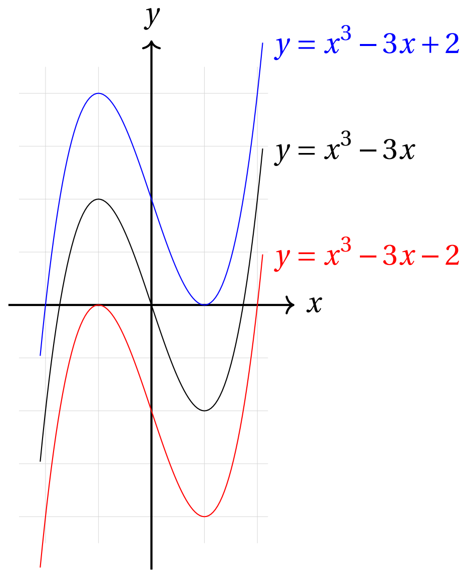
$$y_1 = x_1^3 - 3x_1 = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2 \quad \text{ja} \quad y_2 = x_2^3 - 3x_2 = 1^3 - 3\cdot 1 = -2\,.$$

Õnneliku juhuse läbi leidsimegi kuupfunktsiooni, mille ekstreemumpunktide y-koordinaatide vahe on 4. (Kui meil poleks nii palju õnne olnud, oleksime pidanud funktsiooni graafikut y-telje suunas välja venitama või kokku suruma. Seda oleks saanud teha, korrutades funktsiooni avaldist sobiva konstandiga A, misjärel oleksime saanud funktsiooni kujul $A(x^3 - 3x) = Ax^3 - 3Ax$.)

Nüüd nihutame leitud funktsiooni $x^3 - 3x$ graafikut 2 ühiku võrra y-telje negatiivses ning sama palju positiivses suunas. Saame kuupfunktsioonid $x^3 - 3x - 2$ ja $x^2 - 3x + 2$, mis sobivad ülesande tingimustega. Selles saame veenduda näiteks algebraliselt, tegurdades

$$x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 \quad \text{ja} \quad x^2 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2\,.$$

Nende funktsioonide graafikud näevad välja niisugused:



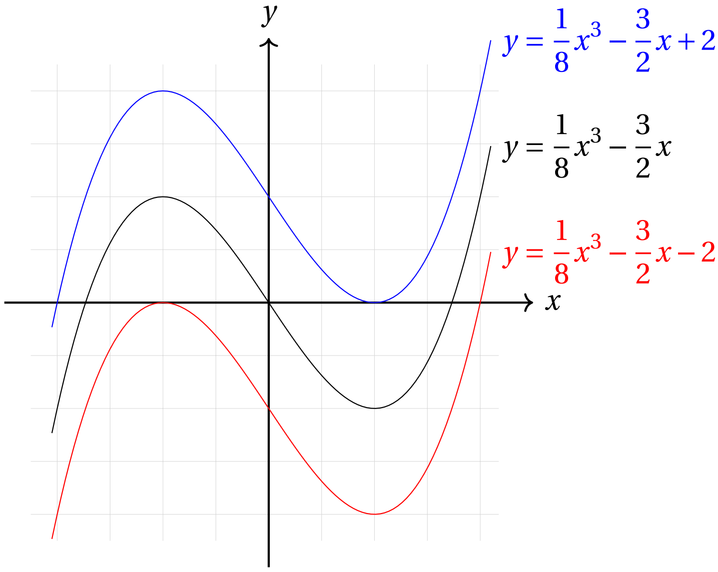
Leitud funktsioonid pole kaugeltki ainsad. Kui me otsiksime ülaltoodud lahenduses kuupparabooli $x^3 + cx$, mille ekstreemumid on kohtadel 2 ja -2, saaksime c jaoks tingimuse $\pm\sqrt{-\frac{c}{3}} = \pm 2$, mida rahuldab $c = -12$. Asendades $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$ avaldisse $x^3 - 12x$ saame ekstreemumpunktide y-koordinaatideks vastavalt

$$y_1 = x_1^3 - 12x_1 = (-2)^3 - 12\cdot(-2) = 16 \quad \text{ja} \quad y_2 = x_2^3 - 12x_2 = 2^3 - 12\cdot 2 = -16\,.$$

Nüüd on ekstreemumpunktide y-koordinaatide vahe 32, seega peame funktsiooni avaldist korrutama konstandiga $A = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, mis annab $\frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$. Jääb lisada vabaliikmed -2 ja $+2$ ning kokkuvõttes saame funktsioonid $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2$

ja $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$, mis rahuldavad samuti ülesande tingimusi. Vastavad avaldised tegurduvad kujul

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2 = \frac{1}{8}(x-4)(x+2)^2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2.$$



11.2 Vastus: $x = 0, y = 0$ on ainus lahend.

Ilmselt sobivad $x = 0, y = 0$ lahenditeks. Näitame, et ülesande süsteemil pole teisi lahendeid.

Kuivõrd siinusfunktsioon omandab väärtusi -1 ja 1 vahelt, peavad ülesande süsteemi lahendid samuti rahuldama tingimust $x, y \in [-1; 1]$. Selles piirkonnas on süsteemi teine võrrand samaväärne võrdusega $y = \arcsin x$.

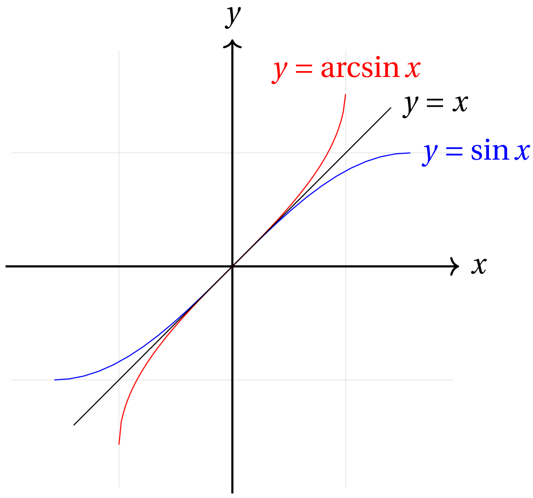
Uurime siinusfunktsiooni graafikut piirkonnas $x \in (0; 1]$ ja näitame, et sel juhul kehtib võrratus $x > \sin x$. Funktsiooni $f(x) = x - \sin x$ tuletis on $f'(x) = 1 - \cos(x)$. Kuivõrd $f'(x) > 0$, kui $x \in (0; 1]$, on funktsioon $f(x)$ selles piirkonnas kasvav. Kuna lisaks $f(0) = 0$, peabki piirkonnas $(0; 1]$ kehtima ka võrratus $f(x) > 0$ ehk $x > \sin x$.

Järgmiseks veendume, et piirkonnas $(0; 1]$ kehtib ka võrratus $x < \arcsin x$. Selleks võime uurida funktsiooni $g(x) = x - \arcsin x$ ning tema tuletist $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Kui $x \in (0; 1)$, siis $g'(x) < 0$, millest ülaltehtuga analoogiliselt järeldubki, et vaadeldavas piirkonnas kehtib võrratus $g(x) < 0$ ehk $x < \arcsin x$. (Rangelt võttes pole $g'(x)$ kohal $x = 1$ määratud, aga seal saame eraldi veenduda, et $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} > 1$.)

Kokkuvõttes saame piirkonnas $(0; 1]$ võrratused $\arcsin x > x > \sin x$, niisiis seal ei saa võrranditel $y = \sin x$ ja $y = \arcsin x$ ühist lahendist olla.

Kui arkussiinuse tuletis meelde ei tule, saab arutleda ka teisiti. Siinus ja arkussiinus on teineteise pöördfunktsioonid, niisiis on nende graafikud üksteise peegeldused sirge $y = x$ suhtes. Kui siinusfunktsiooni graafik jääb piirkonnas $(0; 1]$ sellest sirgest allapoole, peab arkussiinuse graafik jääma temast ülespoole.

Lahenduse lõpetuseks jääb veel tähele panna, et funktsioonid $y = x$, $y = \sin x$ ja $y = \arcsin x$ on paaritud, seega kehtivad piirkonnas $[-1; 0)$ vastupidised võrratused $\sin x > x > \arcsin x$ ning järelikult ei leidu ülesande süsteemil ka selles piirkonnas lahendit.



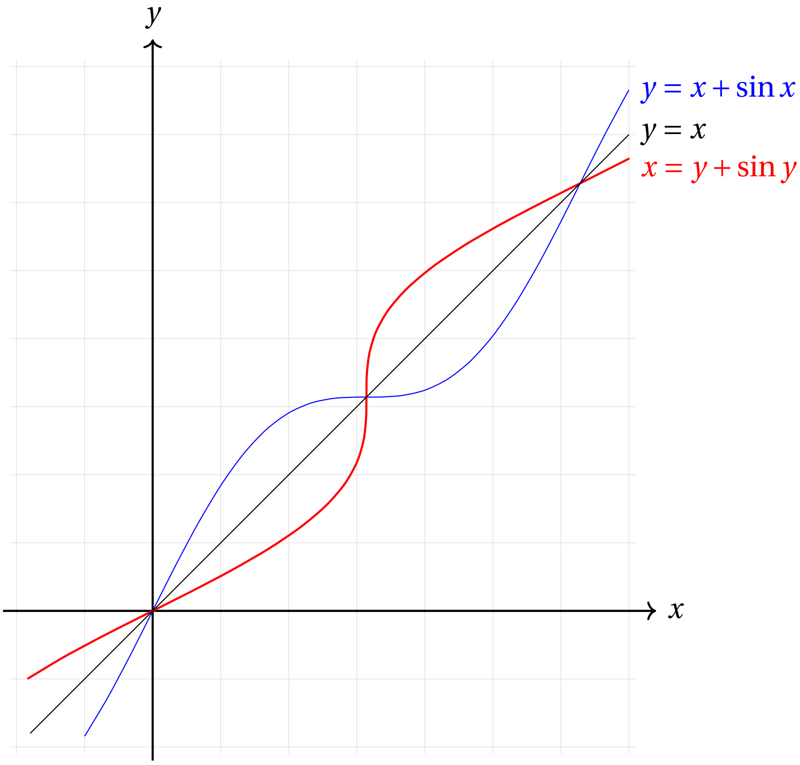
11.3 Vastus: $x = y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Paneme tähele, et võrdustes $x + \sin x = y$ ja $y + \sin y = x$ on muutujad omavahel vahetatud. See tähendab, et tasandi nende punktide (x, y) hulgad, mis rahuldavad vastavaid võrdusi, on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. Muuhulgas saavad need punktid (x, y), mis rahuldavad mõlemat võrdust, asuda ainult sirgel $y = x$. Seega võime uurida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + \sin x = y \\ y = x \end{cases}.$$

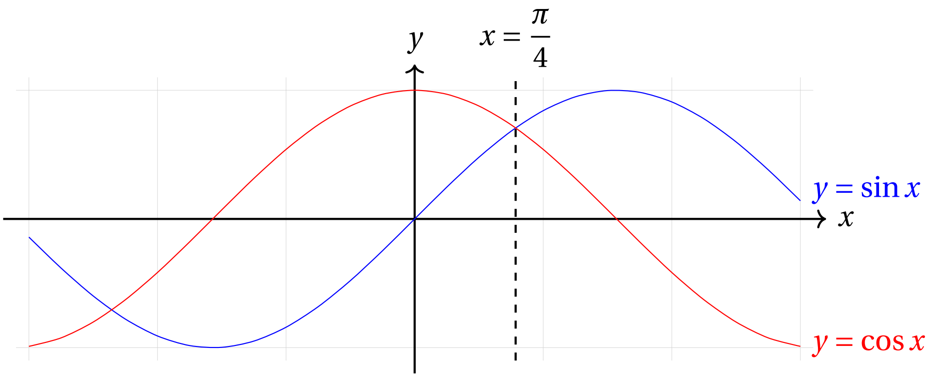
Asendus süsteemi teisest võrrandist esimesse annab $x + \sin x = x$ ehk $\sin x = 0$, mille lahenditeks on $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Teisest küljest on lihtne näha, et kõik lahendid kujul $x = y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ rahuldavad algset võrrandisüsteemi.

Kuna funktsioon $y = x + \sin x$ on rangelt kasvav (milles võib kergesti veenduda tuletise abil), leidub tal pöördfunktsioon. Seda pöördfunktsiooni avaldis $y + \sin y = x$ kirjeldabki. Huvitaval kombel ei õnnestu meil seda võrdust kujule $y = f(x)$ lihtsal moel teisendada. Enamgi veel, on võimalik tõestada, et see pöördfunktsioon ei avaldu elementaarfunktsioonide kaudu. Sellele vaatamata saame me joonistada tema graafiku, vahetades lihtsalt telgede rollid ning leides iga y-i väärtuse järgi x-i, mitte vastupidi! Nagu peatüki sissejuhatuses juba nägime, on tulemuseks funktsiooni $y = x + \sin x$ graafiku peegeldus sirgest $y = x$.

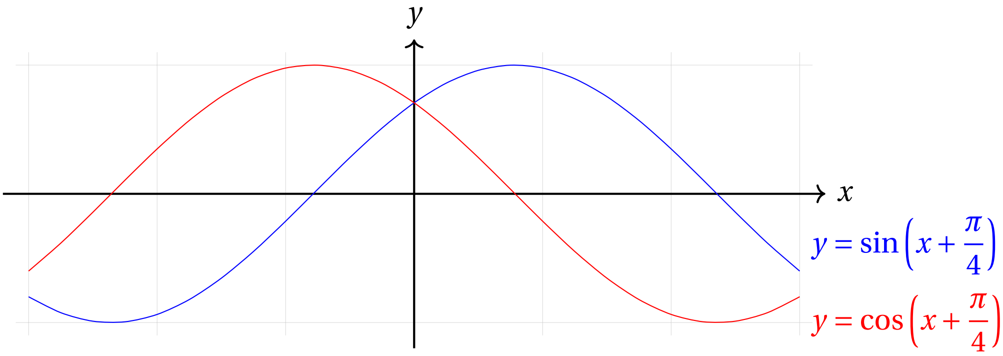


11.4 Vastus: a) jah, b) jah.

a) Mõeldes erinevate elementaarfunktsioonide ja nende graafikute peale, paneme tähele, et siinusfunktsiooni graafik on sarnane tema tuletise, koosinusfunktsiooni graafikuga. Siinuse graafiku peegeldus y-teljest ei anna koosinuse graafikut, küll aga leiduvad vertikaalsed sirged, mille suhtes need graafikud teineteise peegelduseks on. Sobib näiteks sirge võrrandiga $x = \frac{\pi}{4}$:



Selleks, et graafikud oleks teineteise peegeldused y-telje suhtes, tuleb neid nihutada $\frac{\pi}{4}$ võrra vasakule. Tulemuseks on funktsioonide $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ja $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ graafikud:



Näitame, et need funktsioonid tõepoolest rahuldavad ülesande tingimusi. Ühest küljest saame liitfunktsiooni tuletise abil

$$\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Kui liitfunktsiooni tuletise valem meelde ei tule, saame kasutada ka nurkade summa siinuse valemit:

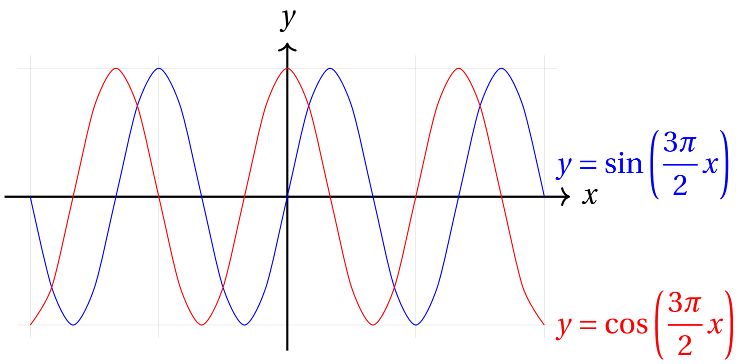
$$\begin{aligned}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)' &= \left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)' = \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4} - \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Teisest küljest saame funktsiooni $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ graafikut y-telje suhtes peegeldades funktsiooni

$$\begin{aligned}\sin\left((-x)+\frac{\pi}{4}\right) &= \sin(-x)\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos(-x)\cdot\sin\frac{\pi}{4} = -\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4} - \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

graafiku, mida oligi tarvis tõestada.

b) Pärast a)-osa edukat lahendamist tekib mõte ka seekord trigonomeetriliste funktsioonide abi kasutada. Siinuse tuletise koosinuse graafiku saame, nihutades siinusfunktsiooni graafikut $\frac{3\pi}{2}$ võrra x-telje positiivses suunas. Niisiis, kas vastuseks võiks sobida siinuse graafik, kui teda $\frac{3\pi}{2}$ korda x-telje suunas kokku suruda? Tulemuseks saame funktsiooni $\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ graafiku, mida 1 ühiku võrra paremale nihutades on tulemuseks funktsiooni $\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ graafik:



Probleem seisneb aga selles, et funktsiooni $\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ tuletis ei ole $\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$, vaid liitfunktsiooni tuletise reegli alusel hoopis

$$\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right)' = \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\cdot\left(\frac{3\pi}{2}x\right)' = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right).$$

Seda ülesannet lahendades püüdis raamatu autor mitmel teiselgi moel trigonomeetrilisi funktsioone rakendada, kuid lõpuks ikkagi ebaõnnestunult.

Millised funktsioonid veel tuletist võttes oma kuju säilitavad? Muidugi tuleb kohe meelde, et $(e^x)' = e^x$, kuid see funktsioon otse ei sobi, sest tuletise võtmine ei anna graafiku nihet x-telje suunas.

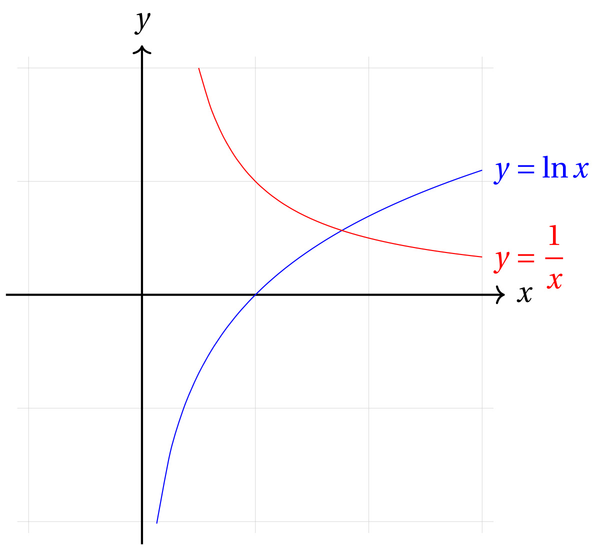
Äkki on abi üldistest eksponentfunktsioonidest? Tuletame meelde, et funktsiooni $y = a^x$ tuletis on $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. Teisest küljest saame funktsiooni $y = a^x$ graafikut x-telje positiivses suunas 1 ühiku võrra nihutades funktsiooni $y = a^{x-1}$ graafiku. Uurime võrrandit

$$a^x \cdot \ln a = a^{x-1},$$

$$a^x \cdot \ln a = a^x \cdot \frac{1}{a},$$

$$\ln a = \frac{1}{a}.$$

Ülesande b)-osa väite tõestamiseks piisab näidata, et saadud võrrandil leidub lahend. Selles võime veenduda, uurides funktsioonide $y = \ln x$ ja $y = \frac{1}{x}$ graafikuid:



Kuna mõlemad vaadeldavad funktsioonid on piirkonnas $(0;\infty)$ pidevad, funktsioon $y = \ln x$ on rangelt kasvav muutumispiirkonnaga $(-\infty;\infty)$ ning funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on rangelt kahanev muutumispiirkonnaga $(0;\infty)$, peab neil tõepoolest leiduma ühine punkt mingil kohal $x = a$. Reaalarv a annabki ülesande b)-osa lahendiks sobiva funktsiooni $y = a^x$.

Arvutiülesanne 11.1 Leia arvuti abil võrrandi $\ln a = \frac{1}{a}$ lahendi ligikaudne väärtus.

11.5 Vastus: $\frac{\log_2 e - \log_2 \log_2 e}{\sqrt{2}}$.

Nihutame sirget $y = x$ paralleellükkega funktsiooni $y = 2^x$ graafiku poole, kuni jooned puutuvad. Tekkiv puutepunkt sobibki punktiks Q. Arvutame selle punkti koordinaadid.

Kõigepealt tuleb leida koht, kus funktsiooni $y = 2^x$ graafiku puutuja tõus on 1. Funktsiooni $y = 2^x$ tuletis on $y' = \ln 2 \cdot 2^x$, niisiis peame lahendama võrrandi

$$\begin{aligned} \ln 2 \cdot 2^x &= 1\,, \\ 2^x &= \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e\,, \\ x &= \log_2 \log_2 e \ (\approx 0{,}529)\,. \end{aligned}$$

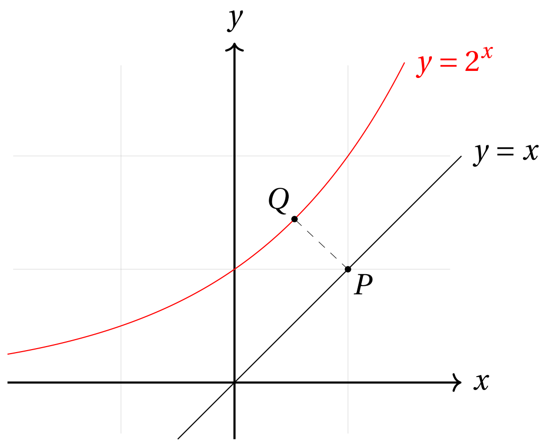
Vastav y-koordinaat on muidugi $2^x = \log_2 e$ ($\approx 1{,}443$).

Punktiks P sobib punkti $Q(\log_2 \log_2 e; \log_2 e)$ ristprojektsioon sirgele $y = x$. See ristprojektsioon toimub vektori $(1; -1)$ sihis, st me otsime niisugust vektorit $(d; -d)$, et punkt $P(\log_2 \log_2 e + d; \log_2 e - d)$ satuks sirgele $y = x$. Viimane tingimus annab arvu d leidmiseks võrrandi

$$\begin{aligned} \log_2 \log_2 e + d &= \log_2 e - d\,, \\ 2d &= \log_2 e - \log_2 \log_2 e\,, \\ d &= \frac{\log_2 e - \log_2 \log_2 e}{2}\,. \end{aligned}$$

Vektori $\overrightarrow{QP} = (d; -d)$ pikkus on $\sqrt{d^2 + (-d)^2} = \sqrt{2}d$ ja otsitavaks kauguseks seega

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\log_2 e - \log_2 \log_2 e}{2} = \frac{\log_2 e - \log_2 \log_2 e}{\sqrt{2}} \ (\approx 0{,}646)\,.$$



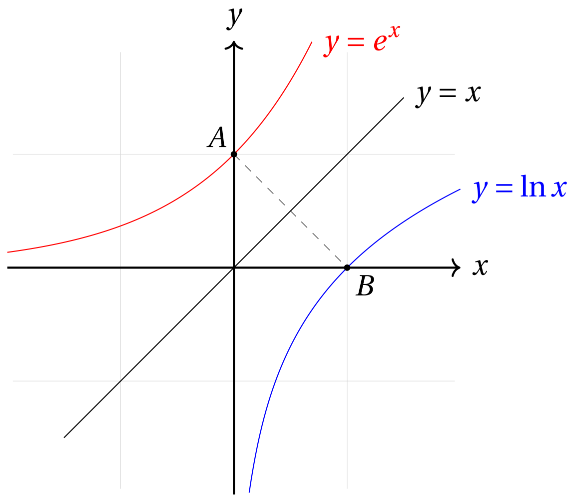
11.6 Vastus: $\sqrt{2}$.

Paneme tähele, et funktsioonide $y = e^x$ ja $y = \ln x$ kui pöördfunktsioonide graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. See tähendab, et me saame lahenduses kasutada ülesande 11.5 ideed.

Nihutame sirget $y = x$ endaga paralleelselt kuni puutumisteni funktsioonide $y = e^x$ ja $y = \ln x$ graafikutega. Olgu puutepunktid vastavalt A ja B; ülesande lahendamiseks peame leidma lõigu AB pikkuse.

Nagu ka ülesandes 11.5, on A punkt, kus funktsiooni $y = e^x$ graafiku tõus on 1. Et selle funktsiooni tuletis on $y' = e^x$, saame võrduse $e^x = 1$, kust järeldub $x = \ln 1 = 0$. Niisiis saame punkti A koordinaatideks $(0; e^0) = (0; 1)$.

Punkt B on sümmeetriline punktiga sirge $y = x$ suhtes, tema koordinaatideks on seega $(1; 0)$. Kokkuvõttes saame $|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$.



11.7 Vastus: $x = 4$ ja $x = 16$.

Uurime funktsiooni $f(x) = \sqrt{x} - \log_2 x = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{\ln 2}$; ülesande vastusteks on siis parajasti selle funktsiooni nullkohad. Funktsioon $f(x)$ on määratud piirkonnas $(0; \infty)$ ning tema tuletis on $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x \ln 2}$. Nii vaadeldav funktsioon kui ka tema tuletis on määramispiirkonnas pidevad. Leiame tuletise nullkoha(d):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\ln 2} &= 0\,, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{x\ln 2}\,, \\ \sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}} &= \frac{2}{\ln 2}\,, \\ x &= \frac{4}{(\ln 2)^2}\,. \end{aligned}$$

Niisiis on vaadeldaval tuletisel ainult üks nullkoht $x_0 = \dfrac{4}{(\ln 2)^2}$. Lisaks on lihtne näha, et kui $x < x_0$ (vastavalt $x > x_0$), siis $f'(x) < 0$ (vastavalt $f'(x) > 0$); tõestuseks võime ülaltehtud arutluse teha võrduse asemel läbi vastava võrratusega.

Järelikult on funktsioon $f(x)$ piirkonnas $(0; x_0)$ rangelt kahanev ja piirkonnas $(x_0; \infty)$ rangelt kasvav. Muuhulgas saab tal kummaski piirkonnas olla ülimalt üks nullkoht. Jääb veel tähele panna, et $x = 4$ ja $x = 16$ on rahuldavad ülesande tingimusi, sest $\sqrt{4} = 2 = \log_2 4$ ja $\sqrt{16} = 4 = \log_2 16$.