10. Ühe muutuja polünoomid

10.1 Polünoomi mõiste, polünoom juured

Definitsioon 10.1 *n. astme* *ühe muutuja polünoomiks* (ehk *ühe muutuja hulkliikmeks) muutuja x suhtes nimetame avaldist*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0\,,$$

kus kordajad a_i kuuluvad mingisse arvuhulka A ja $a_n \neq 0$. Kui polünoomi pealiikme kordaja $a_n = 1$, siis ütleme, et tegemist on taandatud polünoomiga.

Matemaatikavõistlustel esinevad peamiselt reaal- ja täisarvuliste kordajatega hulkliikmed. Konstantse polünoomi $P(x) = c$ (kus $c \neq 0$) astmeks loeme 0, nullpolünoomi $P(x) = 0$ aste on aga määramata. Saab vaadelda ka mitmemuutujapolünoome; neid käsitleme põhjalikumalt jaotises 11.

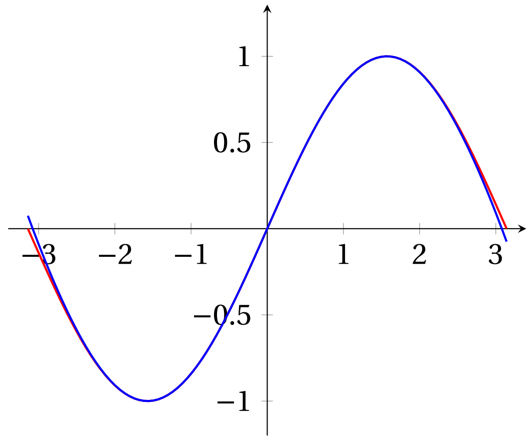
Miks polünoomid üldse huvitavad on? Ühest küljest selle pärast, et nende väärtusi on väga lihtne arvutada – tarvis läheb ainult liitmist, lahutamist ja korrutamist. Teisest küljest aga on nende abil võimalik arvutada ligikaudselt palju keerukamate funktsioonide väärtusi.

▪ **Näide 10.1** Kuidas arvutada siinusfunktsiooni väärtust? Loomulikult kalkulaatori või arvutiga. Aga kuidas kalkulaator ja arvuti seda teevad? Osutub, et just nimelt polünoomide abil. Vaatleme hulkliiget

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7\,.$$

Vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ lähendab polünoom p siinusfunktsiooni nii hästi, et viga jääb alla 0,02%.

Vahemiku $[-\pi, \pi]$ otspunktide läheduses on viga juba silmaga nähtav, aga ikka veel väga väike. Joonisel tähistab punane joon siinuse tõelist väärtust ja sinine joon polünoomi P graafikut.



Küsimus, miks just polünoom P siinusfunktsiooni nii hästi lähendab ja millised polünoomid sobivad teistsuguste funktsioonidega, jääb selle raamatu raamidest välja. Oluline on aga mõista, et polünoomid võimaldavad taandada keerukate funktsioonide arvutamise aritmeetika põhitehetele liitmisele, lahutamisele ja korrutamisele. Täpselt niimoodi ongi realiseeritud keerukamate funktsioonide väärtuste leidmine arvutis, sest riistvaralisel tasemel arvuti ainult aritmeetilisi põhitehteid oskabki. ■

Arvutiülesanne 10.1 Võta mõni programm, mis oskab joonistada funktsioonide graafikuid (näiteks GeoGebra[a]).

1. Uuri näite 10.1 polünoomi p laiemas piirkonnas, näiteks $[-2\pi, 2\pi]$. Kui hästi p siinusfunktsiooni seal lähendab?
2. Polünoomi p avaldist uurides torkab silma, et $1 = 1!$, $6 = 3!$, $120 = 5!$ ja $5040 = 7!$. Selline kokkusattumus ei saa olla juhuslik ja ega ta ei olegi. Mis juhtub siis, kui polünoomile sama reegli järgi liikmeid juurde lisada? Mitu liiget tuleks lisada, et lähendusviga vahemikus $[-2\pi, 2\pi]$ oleks väiksem kui $0{,}011$?

[a] https://www.geogebra.org/

Üks oluline näitaja polünoomi käitumise kohta on see, millistel argumendi väärtustel on polünoomi enda väärtus 0.

Definitsioon 10.2 Neid argumendi väärtusi, millel polünoom omandab väärtuse 0, nimetatakse polünoomi *nullkohtadeks* ehk *juurteks*.

Kui palju saab n. astme polünoomil üldse juuri olla? Sellele küsimusele annab vastuse *algebra põhiteoreem*, mille tõestus vaatamata lihtsale sõnastusele jääb käesoleva õpiku raamidest kaugele välja.

Teoreem 10.1 n. astme polünoomil on ülimalt n reaalarvulist juurt.

Küll aga aitab algebra põhiteoreem mõista, mida õigupoolest tähendab, et kaks polünoomi on võrdsed. Paneme tähele, et polünoomide võrdsusele saab anda kaks erinevat mõistlikku definitsiooni. Ühest küljest võiksime polünoome nimetada võrdseteks, kui nende vastavad kordajad on võrdsed. Teisest küljest võiksime öelda, et polünoomid $P(x)$ ja $Q(x)$ on võrdsed funktsioonidena, st et iga reaalarvu x korral $P(x) = Q(x)$.

Õnneks selgub, et need kaks võimalikku definitsiooni on samaväärsed.

Teoreem 10.2 Olgu antud reaalarvuliste kordajatega n. astme polünoomid

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{ja} \quad Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 .$$

Järgmised väited on samaväärsed.

1. Iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral $a_i = b_1$.
2. Iga $x \in \mathbb{R}$ korral $P(x) = Q(x)$.

Tõestus. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ See järeldus on praktiliselt triviaalne. Kui kahe polünoomi kordajad on samad, siis viime me nende polünoomide väärtustamiseks mingil reaalarvul x läbi täpselt samad operatsioonid, järelikult on ka tulemused samad.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Vaatleme polünoomi $R(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, mille kordajad on saadud polünoomide $P(x)$ ja $Q(x)$ vastavate kordajate vahedena, st $c_i = a_i - b_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Paneme tähele, et iga reaalarvu x_0 korral kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
R(x_0) &= c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + c_1 x_0 + c_0 = \\
&= (a_n - b_n) x_0^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x_0^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1) x_0 + (a_0 - b_0) = \\
&= (a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0) - (b_n x_0^n + b_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + b_1 x_0 + b_0) = \\
&= P(x_0) - Q(x_0) = \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Muuhulgas on polünoomil $R(x)$ lõpmata palju juuri. Teoreemi 10.1 põhjal ei saa tegemist olla ühegi lõpliku astmega polünoomiga. Niisiis on ainsaks võimaluseks, et $R(x)$ on nullpolünoom, st iga $i = 0, 1, \ldots, n$ jaoks $c_i = 0$ ehk $a_i = b_i$. □

Ülesanded

Ülesanne 10.1 (Lõppvoor 1997, 9. klass) Leia niisugused täisarvud $a \neq 0$, b ja c, et arv $x = 2 + \sqrt{3}$ ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendiks.

Ülesanne 10.2 (Piirkonnavoor 2021, 11. klass) Leia täisarvuliste kordajatega mittenull-polünoom, mille üks juur on $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Ülesanne 10.3 (Piirkonnavoor 1997, 10. klass) On teada, et võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid ja $a + b + c > 0$. Tõesta, et $c > 0$.

Ülesanne 10.4 (Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Olgu $P(x)$, $Q(x)$ ja $R(x)$ sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid, et iga reaalarvu x korral

$$(P(x))^2 - x(Q(x))^2 = x(R(x))^2 .$$

Tõesta, et polünoomi $P(x) + Q(x) + R(x)$ kõik kordajad on nullid.

Lahendused

10.1 Kui $x = 2 + \sqrt{3}$, siis $x^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$. Järelikult

$$x^2 - 4x = 7 + 4\sqrt{3} - 4 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 7 - 8 = -1 .$$

Saadud võrduse võime kirjutada kujul $x^2 - 2x + 1 = 0$, niisiis sobivad väärtused $a = 1$, $b = -4$ ja $c = 1$.

10.2 Olgu $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$; järelikult $\sqrt[3]{3} = x - \sqrt{2}$. Tõstes viimase võrduse mõlemad pooled kuupi, saame

$$3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3 \cdot 2x - 2\sqrt{2},$$

millest omakorda

$$\sqrt{2}(3x^2 + 2) = x^3 + 6x - 3\,.$$

Selle võrduse mõlema poole ruutu tõstmine annab

$$2(9x^4 + 12x^2 + 4) = x^6 + 36x^2 + 9 + 12x^4 - 6x^3 - 36x$$

ehk pärast sarnaste liikmete koondamist

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0\,.$$

Järelikult sobib otsitavaks polünoomiks $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$.

10.3 Lihtne on näha, et $a + b + c$ on ruutpolünoomi $ax^2 + bx + c$ väärtus kohal 1. Kuna selle polünoomi graafik ei lõika x-telge ja tema väärtus kohal 1 on positiivne, paikneb vaadeldav graafik tervenisti x-teljest kõrgemal. Järelikult on positiivne ka polünoomi väärtus kohal 0 ehk $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

10.4 Näitame, et $P(x)$, $Q(x)$ ja $R(x)$ on nullpolünoomid.

Ülesande tingimuse saame ümber kirjutada kujul

$$(P(x))^2 = x[(R(x))^2 + (Q(x))^2]\,.$$

See võrdus peab kehtima kõigi reaalarvude x korral, seega ka juhul, kui x on negatiivne. Siis aga $(P(x))^2 \geqslant 0$ ja $x[(R(x))^2 + (Q(x))^2] \leqslant 0$, millest järeldub, et iga $x < 0$ jaoks $(P(x))^2 = 0$ ja $(R(x))^2 + (Q(x))^2 = 0$. Viimasest võrdusest järeldub omakorda $(R(x))^2 = (Q(x))^2 = 0$. Niisiis on kõigil kolmel polünoomil lõpmata palju reaalarvulisi juuri. Teoreemi 10.1 põhjal saab see nii olla ainult juhul, kui need polünoomid on nullpolünoomid. Järelikult peab nullpolünoom olema ka $P(x) + Q(x) + R(x)$.

10.2 Tehted polünoomidega

Polünoomid käituvad paljuski täisarvude sarnaselt. Neid saab liita, lahutada, korrutada ja jäägiga jagada. Liitmine ja lahutamine käib liikmeti, korrutamisel koondame sama astmega liikmed.

■ **Näide 10.2** Olgu antud polünoomid $P(x) = 2x + 3$ ja $Q(x) = x^2 - x - 2$. Siis

$$\begin{aligned}
P(x) + Q(x) &= (2x + 3) + (x^2 - x - 2) = x^2 + x + 1\,,\\
P(x) - Q(x) &= (2x + 3) - (x^2 - x - 2) = -x^2 + 3x + 5\,,\\
P(x) \cdot Q(x) &= (2x + 3) \cdot (x^2 - x - 2) =\\
&= 2x^3 - 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x - 6 =\\
&= 2x^3 + x^2 - 7x - 6\,.
\end{aligned}$$

■

Polünoomide jäägiga jagamine sarnaneb täisarvude jäägiga jagamisele, lihtsalt järkude kaupa jagamise asemel jagame astmete kaupa. Asi saab selgemaks näite varal.

▪ **Näide 10.3** Jagame polünoomi x^4+2x^3-x+3 polünoomiga x^2-x-3, st otsime niisuguseid polünoome $Q(x)$ ja $R(x)$, et

$$x^4+2x^3-x+3=(x^2-x-3)\cdot Q(x)+R(x)\,.$$

Kirjutame otsitava $Q(x)$ kohale tühjad sulud, jätame jagatavasse puuduva liikme x^2 kohale veidi ruumi ja saame järgmise üleskirjutuse.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(\qquad\qquad) \end{array}$$

Jagatava kõrgeima astme liige on x^4, jagajal aga x^2. Nende jagatis on x^2, mis annabki jagatispolünoomi $Q(x)$ esimese liikme.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2\qquad\quad) \end{array}$$

Sarnaselt täisarvude pika jagamisega leiame osakorrutise $x^2\cdot(x^2-x-3)=x^4-x^3-3x^2$ ja lahutame selle jagatavast (st liidame vastandpolünoomi $-x^4+x^3+3x^2$) kuni astmeni x^2.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2\qquad\quad) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \end{array}$$

Tuues jagatavast juurde järgmise astme liikme $-x$, tuleb järgmiseks jagada polünoomi $3x^3+3x^2-x$. Jagades selle pealiikme $3x^3$ jälle jagaja pealiikmega x^2 on tulemuseks $3x$, mis annab meile jagatise $Q(x)$ teise liikme.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x\quad\;) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \end{array}$$

Lahutame $3x\cdot(x^2-x-3)=3x^3-3x^2-9x$ vahetulemusest ja toome juurde jagatava viimase liikme 3.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x\quad\;) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\ & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +8x & +3 & \end{array}$$

Viimase vahetulemuse pealiikme $6x^2$ ja jagaja pealiikme x^2 jagatis on 6, mis annabki otsitava jagatise viimase liikme. Lahutame $6\cdot(x^2-x-3)=6x^2-6x-18$ viimasest vahetulemusest.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x+6) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\ & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +8x & +3 & \\ & & -6x^2 & +6x & +18 & \\ \cline{3-5} & & & 14x & +21 & \end{array}$$

Järele jääb lineaarpolünoom $14x+21$, mille pealiikme aste on väiksem kui jagaja aste. See tähendab, et jagamine on lõppenud ja $14x+21$ on jagamisel tekkinud jääk.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & = (x^2-x-3)(x^2+3x+6)+14x+21 \\
-x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\
\cline{1-3}
& 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\
& -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\
\cline{2-4}
& & 6x^2 & +8x & +3 & \\
& & -6x^2 & +6x & +18 & \\
\cline{3-5}
& & & 14x & +21 &
\end{array}
$$

■

Harjutus 10.1 Kontrolli lahti korrutades, et

$$(x^2-x-3)(x^2+3x+6)+14x+21 = x^4+2x^3-x+3\,.$$

Ülesanne 10.5 (Talvine lahtine võistlus 2010, noorem rühm) Olgu x selline reaalarv, et $x^3+2x+2=0$. Leia avaldise $x^5+2x^2-4x+2010$ väärtus.

Lahendus. Vastus: 2014.

Jagame polünoomi $x^5+2x^2-4x+2010$ jäägiga polünoomiga x^3+2x+2:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^5 & & +2x^2 & -4x & +2010 & = (x^3+2x+2)(x^2-2)+2014 \\
-x^5 & -2x^3 & -2x^2 & & & \\
\cline{1-3}
& -2x^3 & & -4x & +2010 & \\
& 2x^3 & & +4x & +4 & \\
\cline{2-5}
& & & & 2014 &
\end{array}
$$

Kuna ülesande tingumuste põhjal $x^3+2x+2=0$, saame

$$x^5+2x^2-4x+2010 = (x^3+2x+2)(x^2-2)+2014 = 0\cdot(x^2-2)+2014 = 2014\,.$$

10.3 Polünoomide tegurdamine

Nagu ka täisarvude puhul, pakub polünoomide jäägiga jagamise juures erilist huvi olukord, kus jääk on null.

Definitsioon 10.3 Ütleme, et polünoom $P(x)$ *jagub* polünoomiga $Q(x)$ ja kirjutame $P(x) \vdots Q(x)$, kui nende jagamisel tekkiv jääk on 0, st leidub selline polünoom $S(x)$, et

$$P(x) = S(x)\cdot Q(x)\,.$$

Sama seose kohta ütleme ka, et polünoom $Q(x)$ *jagab* polünoomi $P(x)$, ja kirjutame $Q(x) \mid P(x)$.

Täisarvude vallast tuttavale algarvu mõistele vastab polünoomide puhul taandumatuse omadus. Kui algarvu p korral on tema ainus tegurdus triviaalne $1\cdot p$ (ja negatiivseid tegureid arvestades ka $(-1)\cdot(-p)$), siis polünoomidel on triviaalseid tegurdusi rohkem. Nii näiteks võime hulkliikme $2x^2+4x-6$ esitada kujul

$$2x^2+4x-6=1\cdot(2x^2+4x-6)=2\cdot(x^2+2x-3)=4\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)$$

jne, aga need esitused ei anna meile tema omaduste kohta uut informatsiooni. Huvitavaks läheb asi alles siis, kui tegurite aste on madalam kui tegurdatava aste ja suurem kui 0.

Definitsioon 10.4 Ütleme, et n. astme polünoom $P(x)$ on *taanduv*, kui leiduvad polünoomid $R(x)$ ja $S(x)$ nii, et nende aste on vähemalt 1 ja

$$P(x)=R(x)\cdot S(x).$$

Kui niisuguseid polünoome $R(x)$ ja $S(x)$ ei leidu, nimetame polünoomi $P(x)$ *taandumatuks.*

NB! Ära aja sassi taandumatu ja taandatud polünoomi mõisteid! Polünoom on **taandumatu**, kui tal ei leidu mittetriviaalset tegurdust, ja **taandatud**, kui tema pealiikme kordaja on 1!

Harjutus 10.2 Kas polünoom x^2-x+1 on taanduv või taandumatu? (Otsime reaalarvuliste kordajatega tegureid.)

Lahendus. Kui polünoom x^2-x+1 oleks taanduv, peaksid leiduma esimese astme reaalpolünomid $ax+b$ ja $cx+d$ nii, et

$$x^2-x+1=(ax+b)(cx+d).$$

Paneme tähele, et sel juhul peaksid antud polünoomil leiduma reaalarvulised nullkohad $-\frac{b}{a}$ ja $-\frac{d}{c}$. Tõepoolest, $a\neq 0$ ja $c\neq 0$, sest muidu poleks $ax+b$ ja $cx+d$ esimese astme polünoomid, ja lisaks

$$a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0 \quad \text{ning} \quad c\cdot\left(-\frac{d}{c}\right)+d=-d+d=0.$$

Ruutvõrrandi

$$x^2-x+1=0$$

diskriminant on aga $-1-4\cdot 1=-5<0$, seega polünoomil x^2-x+1 ei leidu reaalarvulisi nullkohti. Järelikult peab ta olema taandumatu.

Ülesandes 10.2 tundis tähelepanelik lugeja loodetavasti ära järgmise kooliõpikust pärineva tulemuse, mis annab üldise eeskirja ruutkolmliikmete tegurdamiseks.

Teoreem 10.3 Kui ruutvõrrandil $ax^2+bx+c=0$ on lahendid x_1 ja x_2, siis kehtib võrdus

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ülesanne 10.6 (Lõppvoor 1995, 9. klass) Leia kõik täisarvud n, mille korral $4n^2+16n-65$ on algarv.

Lahendus. Vastus: sobivad $n=-7$ ja $n=3$.

Ülesande ruutkolmliikme tegurdamiseks vaatleme n-i reaalarvulise muutujana ja lahendame ruutvõrrandi $4n^2+16n-65=0$. Ruutvõrrandi lahendivalem annab

$$n_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-65)}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 \pm \sqrt{1296}}{8} = \frac{-16 \pm 36}{8}.$$

Niisiis $n_1 = -\frac{13}{2}$ ja $n_2 = \frac{5}{2}$, mistõttu teoreemist 10.3

$$4n^2+16n-65 = 4 \cdot \left(n + \frac{13}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right) = (2n+13)(2n-5)$$

iga reaalarvu, aga järelikult ka iga täisarvu n jaoks.

Korrutis $(2n+13)(2n-5)$ saab täisarvulise n korral anda algarvu ainult siis, kui $2n+13=\pm1$ või $2n-5=\pm1$. Võimalikud n väärtused on seega $-7,-6,2$ ja 3. Leiame uuritava avaldise väärtuse nende n-ide jaoks.

$$\begin{aligned}
(2\cdot(-7)+13)(2\cdot(-7)-5) &= (-1)\cdot(-19) = 19,\\
(2\cdot(-6)+13)(2\cdot(-6)-5) &= 1\cdot(-17) = -17,\\
(2\cdot2+13)(2\cdot2-5) &= 17\cdot(-1) = -17,\\
(2\cdot3+13)(2\cdot3-5) &= 19\cdot1 = 19.
\end{aligned}$$

Kuna -17 pole algarv, sobivad ainult $n=-7$ ja $n=3$.

Harjutuses 10.2 nägime, et reaalarvuliste kordajatega polünoomi juure leidumine on tihedalt seotud lineaarteguri leidumisega. Osutub, et need omadused ongi samaväärsed. Järgmist teoreemi tuntakse ka Bézout' väikese teoreemi[1] nime all.

Teoreem 10.4 Olgu $P(x)$ reaalarvuliste kordajatega polünoom ja $a \in \mathbb{R}$. Polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x-a$ tekkiv jääk on $P(a)$. Muuhulgas on a polünoomi $P(x)$ juureks parajasti siis, kui $(x-a) \mid P(x)$.

Tõestus. Jagame polünoomi $P(x)$ jäägiga polünoomiga $x-a$. Kuna $x-a$ on 1. astme polünoom ja jääk on jagajast madalam astmega, saab jääk olla ainult 0. astme ehk konstantne polünoom; olgu ta näiteks c. Tähistades jagatise $Q(x)$ saame

$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + c.$$

See võrdus kehtib muutuja x iga väärtuse korral, muuhulgas ka siis, kui $x=a$. See asendus annab

$$P(a) = (a-a)\cdot Q(a) + c = 0 \cdot Q(a) + c = c;$$

teisisõnu – polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x-a$ tekkiv jääk ongi täpselt $P(a)$.

Nüüd on lihtne näha, et a on polünoomi $P(x)$ juureks (st $P(a)=0$) parajasti siis, kui $P(x)$ avaldub kujul $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$ mingi polünoomi $Q(x)$ korral, st $(x-a) \mid P(x)$.

□

[1] Étienne Bézout [bezu:] (1730 – 1783) oli tuntud prantsuse matemaatik.

Teoreemi 10.4 saab kasutada polünoomi lineaartegurite otsimiseks. Lihtne võimalus selleks on proovida läbi näiteks $a = 1$, $a = 2$, $a = -1$ jne ning kui mõni neist osutub $P(x)$ juureks, olemegi leidnud lineaarteguri $x - a$.

Eriti lihtne on kontrollida, kas $a = 1$ on juur või mitte. Selle juures osutub kasulikuks järgmine teoreem.

Teoreem 10.5 Polünoomi kordajate summa võrdub tema väärtusega kohal 1.

Tõestus. Olgu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 .$$

Kuna iga i korral $1^i = 1$, saame

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1^1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 .$$

□

Teoreemist 10.5 saamegi lihtsa kriteeriumi otsustamaks, kas 1 on vaadeldava polünoomi juur.

Teoreem 10.6 Arv 1 on polünoomi $P(x)$ juureks (ja seega ka $P(x) \vdots (x-1)$) parajasti siis, kui selle polünoomi kordajate summa on 0.

Harjutus 10.3 Polünoomi kordajate põhjal saab lihtsasti otsustada ka seda, kas -1 on antud polünoomi juureks või ei. Kuidas?

Ülesanded

Ülesanne 10.7 (Kevadine lahtine võistlus 2006, noorem rühm) Leia kõik reaalarvud, millel on järgmine omadus: selle arvu kuubi ja ruudu vahe on võrdne selle arvu ruudu ja arvu enda vahe ruuduga.

Ülesanne 10.8 (Lõppvoor 2021, 9. klass) Lahenda võrrand

$$x^2 + 11 = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Ülesanne 10.9 (Piirkonnavoor 2018, 10. klass) Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 10.10 (Lõppvoor 2013, 10. klass) Kas hulkliiget $x^4 + x^2 + 1$ saab esitada korrutisena hulkliikmetest, kus muutuja x astendaja on väiksem kui 4 ja kõik kordajad on reaalarvud?

Ülesanne 10.11 (Lõppvoor 2018, 12. klass) Tõesta, et mistahes positiivse reaalarvu x korral

$$(x+1)(x+2)(x+5) \geqslant 36x\,.$$

Ülesanne 10.12 (Kevadine lahtine võistlus 1993) Näita, et hulkliige $(4x^2+17x+14)^k-1$ jagub hulkliikmega x^2+4x+3 mistahes positiivse paarisarvulise astendaja k korral.

Ülesanne 10.13 (Sügisene lahtine võistlus 2008, vanem rühm) Avaldises $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2008}$ viiakse astendamine läbi ja koondatakse sarnased liikmed. Tõesta, et vähemalt üks saadav hulkliikme kordajatest on negatiivne.

Ülesanne 10.14 (Sügisene lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Kas kehtib väide, et suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0$, mille väärtus iga täisarvulise argumendi x korral on kordarv, avaldub kujul $P(x)=Q(x)\cdot R(x)$, kus Q ja R on täisarvuliste kordajatega polünoomid, mis pole konstantselt 1 ega -1?

Ülesanne 10.15 (Lõppvoor 2015, 11. klass) Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n , mis esituvad mingi algarvu positiivse täisarvulise astmena ja mille korral võrrandil

$$x^3-2x^2+2x-1=n$$

leidub täisarvuline lahend.

Lahendused

10.7 Vastus: on $0,1$ ja 2.

Tähistades otsitavat reaalarvu muutujaga x, saame võrrandi

$$\begin{aligned} x^3-x^2 &= (x^2-x)^2\,,\\ x^3-x^2 &= x^4-2x^3+x^2\,,\\ 0 &= x^4-3x^3+2x^2\,. \end{aligned}$$

Tegurdame saadud võrrandi avaldise:

$$x^4-3x^3+2x^2=x^2(x^2-3x+2)\,.$$

Kas avaldist x^2-3x+2 saab edasi tegurdada? Jah, saab küll. Selleks võime kasutada näiteks teoreemi 10.3. Taandatud ruutvõrrandi $x^2-3x+2=0$ lahendid on

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2};\quad x_1=2, x_2=1\,,$$

niisiis $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Kokkuvõttes saame võrrandi

$$x^2(x-2)(x-1)=0\,,$$

mille lahenditeks on $0,1$ ja 2. Lihtne kontroll näitab, et kõik leitud arvud rahuldavad ülesande tingimusi.

10.8 Korrutame mõlemad võrrandi pooled muutujaga x ning viime kõik liikmed ühele poole. Tulemusena teiseneb antud võrrand kujule

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\,.$$

Näeme, et $1-6+11-6=0$, järelikult on 1 vaadeldava võrrandi üheks lahendiks ja polünoomi $x^3-6x^2+11x-6$ juureks. Teoreemi 10.4 põhjal peab see polünoom jaguma polünoomiga $x-1$. Teeme jagamise läbi.

$$\begin{array}{l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2-5x+6)\\
\underline{-x^3 + x^2}\\
\quad -5x^2 + 11x\\
\quad \underline{5x^2 - 5x}\\
\qquad 6x - 6\\
\qquad \underline{-6x + 6}\\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Selleks, et korrutis võrduks nulliga, peab nulliga võrduma üks teguritest. Järelikult saame antud võrrandi ülejäänud lahendid leida ruutvõrrandist

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

mille lahenditeks on 2 ja 3. Algse võrrandi lahendid on seega 1, 2 ja 3.

10.9 Kui midagi paremat pähe ei tule, katsetame asendusvõttega. Esimesest võttandist saame $y = 2 - x^2$ ning selle asendamine teise võrrandisse annab

$$(2-x^2)^2 + x - 2 = 0\,,$$
$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0\,.$$

Neljanda astme võrrandit nähes pole veel vaja ehmuda. Võibolla on mõned tema lahendid lihtsalt ära arvatavad? Tõepoolest, kuna $1-4+1+2=0$ teame kohe, et $x=1$ sobib lahendiks. Jagame polünoomi x^4-4x^2+x+2 läbi polünoomiga $x-1$ ja saame

$$\begin{array}{l}
x^4 \quad - 4x^2 \; + x + 2 = (x-1)(x^3+x^2-3x-2)\\
\underline{-x^4 + x^3}\\
\quad x^3 - 4x^2\\
\quad \underline{-x^3 + x^2}\\
\qquad -3x^2 + x\\
\qquad \underline{3x^2 - 3x}\\
\qquad\quad -2x + 2\\
\qquad\quad \underline{2x - 2}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Korrutis saab olla null ainult siis, kui üks teguritest on null. Algse võrrandi ülejäänud lahendid leiame järelikult võrrandist

$$x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0\,.$$

Selle lahendeid otsides proovime läbi absoluutväärtuselt väikeseid muutuja x väärtusi, kuni leiame, et $x=-2$ puhul $(-2)^3+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=-8+4+6-2=0$. Oleme leidnud teise lahendi ja ülejäänud lahendite leidmiseks jagame polünoomi x^3+x^2-3x-2 polünoomiga $x+2$.

$$\begin{array}{l}
x^3 \quad + x^2 - 3x - 2 = (x+2)(x^2-x-1) \\
\underline{-x^3 - 2x^2} \\
\qquad -x^2 - 3x \\
\qquad \underline{\;\; x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad -x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Niisiis oleme esitanud

$$x^4-4x^2+x+2=(x-1)(x+2)(x^2-x-1)$$

ja algse võrrandi ülejäänud lahendite leidmiseks piisab lahendada ruutvõrrand

$$x^2-x-1=0\,.$$

Selle lahenditeks on $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Oleme saanud kõik võimalikud muutuja x väärtused. Leides vastavad y väärtused võrrandist $y=2-x^2$, saame kokkuvõtteks lahendid $(1,1)$, $(-2,-2)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ja $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Kontroll näitab, et kõik need sobivad ka algse võrrandisüsteemi lahenditeks.

10.10 4. astme hulkliikme tegurdamisel peab tekkima kas kaks ruutpolünoomi või vähemalt üks lineaarpolünoom.

Uurime kõigepealt lineaarpolünoomi saamise võimalust. Teoreemi 10.4 põhjal peaks antud hulkliikmel sel juhul leiduma reaalarvuline juur. Muutujavahetusega $y=x^2$ saame ruutvõrrandi

$$y^2+y+1=0$$

mille determinant $1-4\cdot1=-3$ on negatiivne. Järelikult pole sellel võrrandil reaalarvulisi lahendeid, mistõttu pole hulkliikmel x^4+x^2+1 ka reaalarvulisi juuri.

Jääb üle ainult võimalus, et see hulkliige esitub kahe ruutpolünoomi korrutisena. Nii hulkliikme x^4+x^2+1 pealiikme kui ka vabaliikme kordaja on 1. Proovime, kas me suudame teguriteks leida ruutpolünoomid, mille ruut- ja vabaliikme kordajad on samuti 1, st otsime tegurdust kujul

$$x^4+x^2+1=(x^2\qquad+1)(x^2\qquad+1)\,.$$

Kuna $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$, siis peab vähemalt ühes teguris esinema ka lineaarliige. See omakorda tähendab, et lahti korrutades saame nii 1. kui 3. astme liikmeid, mis peavad lõpptulemusest välja koonduma. Seega on mõtet proovida ühte tegurisse lineaarliiget pluss- ja teise miinusmärgiga. Kõige lihtsam valik $+x$ ja $-x$ viib kohe sihile, sest võrdus

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

osutub tõeseks. Oleme leidnud otsitava tegrduse.

10.11 Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist leiame, et ülesande võrratus on samaväärne võrrarusega

$$x^3 + 8x^2 - 19x + 10 \geqslant 0\,.$$

Paneme tähele, et võrratuse vasaku poole polünoomi kordajate summa on 0, järelikult jagub see polünoom teoreemi 10.6 põhjal kaksliikmega $x - 1$. Teeme jagamise läbi:

$$\begin{array}{rl}
x^3 + 8x^2 - 19x + 10 & = (x-1)(x^2 + 9x - 10) \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \qquad\qquad & \\
9x^2 - 19x \qquad & \\
\underline{-\,9x^2 \;\; + 9x} \qquad & \\
-\,10x + 10 & \\
\underline{10x - 10} & \\
0 &
\end{array}$$

Järgmiseks tegurdame jagatiseks saadud polünoomi $x^2 + 9x - 10$. Selleks on mitu võimalust. Kuna ka selle polünoomi kordajate summa on 0, saame jälle kasutada teoreemi 10.6. Teine võimalus on lahendada ruutvõrrand $x^2 + 9x - 10 = 0$ ja leida tegurdus teoreemi 10.3 abil. Kolmas võimalus on Viète'i valemite abil (vt jaotis 10.4) tegurdus lihtsalt ära arvata. Igal juhul saame, et $x^2 + 9x - 10 = (x-1)(x+10)$.

Kokkuvõttes $x^3 + 8x^2 - 19x + 10 = (x-1)^2(x+10)$. Kuna iga positiivse reaalarvu x korral kehtivad võratused $(x-1)^2 \geqslant 0$ ja $x + 10 > 0$, saamegi neid korrutades ülesande võrratuse tõestada.

10.12 Paneme tähele, et polünoomi $x^2 + 4x + 3$ juured on -1 ja -3, niisiis tegurdub see polünoom teoreemi 10.3 põhjal kujul $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Ülesande lahendamiseks tuleb seega näidata, et paarisarvulise k korral $(4x^2 + 17x + 14)^k - 1 \,\vdots\, (x+1)$ ja $(4x^2 + 17x + 14)^k - 1 \,\vdots\, (x+3)$.

Bézout' väikese teoreemi (teoreem 10.4) põhjal piisab, kui näitame, et -1 ja -3 on ka polünoomi $(4x^2 + 17x + 14)^k - 1$ juured. Need väited järelduvad aga lihtsatest rehkendustest:

$$(4 \cdot (-1)^2 + 17 \cdot (-1) + 14)^k - 1 = (4 - 17 + 14)^k - 1 = 1^k - 1 = 0\,,$$
$$(4 \cdot (-3)^2 + 17 \cdot (-3) + 14)^k - 1 = (36 - 51 + 14)^k - 1 = (-1)^k - 1 = 0\,,$$

sest k on ülesande tingimuste põhjal positiivne paarisarv.

10.13 Olgu $P(x)$ polünoom, mis saadakse ülesande avaldise läbiastendamisel ja sarnaste liikmete koondamisel. Polünoomi pealiikme x^{8032} kordaja on 1 ja vabaliige on 2^{2008}. Teoreemi 10.5 põhjal on selle polünoomi kordajate summa

$$P(1) = (1^4 + 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 2)^{2008} = 2^{2008}\,.$$

Kuna tema pea- ja vabaliikmete summa on $2^{2008} + 1$, peab mõne liikme kordaja olema ka negatiivne.

10.14 Vastus: ei.

Kontranäiteks sobib polünoom $P(x) = x^2 - x + 4$.

Iga täisarvu x korral on x^2 ja x sama paarsusega, järelikult on $x^2 - x$ ja $x^2 - x + 4$ paarisarvud. Teisest küljest kehtib võrdus $x^2 - x = (x-1)x$. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on alati mittenegatiivne, seega iga täisarvu x korral kehtib võrratus $x^2 - x + 4 \geqslant 4$. Järelikult on $x^2 - x + 4$ iga täisarvu x korral kordarv.

Polünoomi $P(x) = x^2 - x + 4$ pealiikme kordaja on 1. Kui ta esituks kahe täisarvuliste kordajatega polünoomi korrutisena, peaks nende pealiikmete kordajad olema kas 1 või -1. Kuna ülesande tingimuste põhjal ei saa need tegurid olla konstantselt 1 ega -1, peaks $P(x)$ tegurduma lineaartegurite korrutiseks. See tähendaks omakorda, et polünoomil $P(x)$ peaks leiduma juur, aga ruutvõrrandil $x^2 - x + 4 = 0$ pole lahendeid. Niisiis ei saa polünoomi $P(x) = x^2 - x + 4$ ülesandes kirjeldatud viisil tegurdada.

10.15 Lihtne on näha, et polünoomi $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ kordajate summa on 0, seega teoreemi 10.6 põhjal on 1 tema juureks. Järelikult jagub see polünoom lineaarpolünoomiga $x - 1$. Läbi jagades saame:

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -2x^2 & +2x & -1 & = (x-1)(x^2-x+1) \\
-x^3 & +x^2 & & & \\
\hline
 & -x^2 & +2x & & \\
 & x^2 & -x & & \\
\hline
 & & x & -1 & \\
 & & -x & +1 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Paneme tähele, et $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$, järelikult peavad täisarvud $x - 1$ ja $x^2 - x + 1$ olema ühistegurita. Lisaks näeme, et kuna ruutpolünoomi $x^2 - x + 1$ diskriminant $(-1)^2 - 4 = -3 < 0$, omandab ta ainult positiivseid väärtusi. Hulkliikmete $x - 1$ ja $x^2 - x + 1$ korrutis peab täisarvulisel kohal x olema mingi algarvu p positiivne täisarvuline aste, järelikult on ainus võimalus, et üks neist on $p^0 = 1$ ja teine p^a, kus a on positiivne täisarv.

Kui $x - 1 = 1$, siis $x = 2$ ja $x^2 - x + 1 = 3$, mis annab lahendi $n = 3^1$. Kui $x^2 - x + 1 = 1$, siis $x^2 - x = 0$, kust saame $x = 1$ või $x = 0$. Siis aga vastavalt $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ ja $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = -1$, mis kumbki ei sobi.

Järelikult on ainsaks lahendiks $n = 3$.

10.4 Viète'i valemid

Selles jaotises uurime, kuidas on omavahel seotud polünoomi juured ja kordajad.

Otsime ruutpolünoome juurtega x_1 ja x_2. Me teame teoreemist 10.4, et kõik niisugused polünoomid peavad jaguma lineaarpolünoomidega $x - x_1$ ja $x - x_2$. Järelikult peavad kõik ruutpolünoomid, mille juured on x_1 ja x_2, esituma kujul

$$a(x - x_1)(x - x_2)\,,$$

kus a on mingi nullist erinev reaalarv (vaata ka teoreemi 10.3). Siin jaotises vaatleme peamiselt *taandatud* polünoome, mille pealiikme kordaja $a = 1$. Näeme, et juurtega x_1

ja x_2 taandatud ruutpolünoome on täpselt üks, nimelt $(x-x_1)(x-x_2)$. Korrutame selle avaldise lahti, et leida vastava polünoomi kordajad:

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\,.$$

Siit saame tuletada Viète'i teoreemi[2] taandatud ruutpolünoomi jaoks.

Teoreem 10.7 Kui taandatud ruutpolünoomi x^2+px+q juured on x_1 ja x_2, siis kehtivad seosed

$$\begin{aligned} p &= -(x_1+x_2)\,, \\ q &= x_1x_2\,. \end{aligned}$$

Samasuguse tulemuse saame anda ka 3. astme hulkliikmete jaoks. Otsime taandatud kuuppolünoomi juurtega x_1, x_2 ja x_3. Sarnaselt eelmise aruteluga leiame, et ainus selline polünoom saab olla $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Teda lahti korrutades leiame:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3\,.$$

Järelikult kehtib Viète'i teoreem kuuppolünoomide jaoks järgmises sõnastuses.

Teoreem 10.8 Kui taandatud kuuppolünoomi x^3+px^2+qx+r juured on x_1, x_2 ja x_3, siis kehtivad seosed

$$\begin{aligned} p &= -(x_1+x_2+x_3)\,, \\ q &= x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\,, \\ r &= -x_1x_2x_3\,. \end{aligned}$$

Harjutus 10.4 Milline näeb Viète'i teoreem välja 4. astme polünoomide jaoks?

Nagu eespool juba öeldud, on Viète'i teoreemi valemid väga kasulikud ülesannetes, kus tuleb omavahel siduda polünoomi kordajad ja juured.

Ülesanne 10.16 (Piirkonnavoor 2019, 10. klass) Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2-px+q=0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3+x_2^3$.

Lahendus. Viète'i valemitest teame, et $x_1+x_2=p$ ja $x_1x_2=q$. Järelikult saame avaldada

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)(x^2-x_1x_2+x_2^2) = (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2) = \\ &= p(p^2-3q) = p^3-3pq\,. \end{aligned}$$

Ülesanded

Ülesanne 10.17 (Piirkonnavoor 2020, 10. klass) Leia kõik reaalarvude paarid (p,q),

[2] François Viète [vi'et] oli 16. sajandi prantsuse matemaatik. Sageli kasutatakse ka tema latiniseeritud nimekuju Franciscus Vieta [viet'a].

mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Ülesanne 10.18 (Piirkonnavoor 1995, 10. klass) Olgu p, q täisarvud ning x_1, x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid. Kas on võimalik, et $|x_1 - x_2| = \sqrt{1995}$?

Ülesanne 10.19 (Piirkonnavoor 2012, 9. klass) Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

Ülesanne 10.20 (Piirkonnavoor 2007, 10. klass) Leia kõik sellised reaalarvude nelikud (a, b, c, d), kus c ja d on ruutvõrrandi $x^2 + ax + b = 0$ lahendid ning a ja b on ruutvõrrandi $x^2 + cx + d = 0$ lahendid.

Ülesanne 10.21 (Sügisene lahtine võistlus 2009, noorem rühm) Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ kordajad a, b, c on täisarvud. Olgu x_1, x_2 selle ruutvõrrandi lahendid. Koosta täisarvuliste kordajatega ruutvõrrand, mille lahendid on arvud x_1^3 ja x_2^3.

Ülesanne 10.22 (Lõppvoor 2000, 11. klass) Leia kõik a väärtused, mille korral võrrandil $x^3 - x + a = 0$ on kolm erinevat täisarvulist lahendit.

Ülesanne 10.23 (Lõppvoor 2007, 11. klass) Leia kõik sellised reaalarvud a, mille korral ruutvõrrandi $x^2 - ax + a = 0$ lahendid on täisarvud.

Lahendused

10.17 Viète'i teoreemi põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p = -\left(\frac{p}{3} + q\right) \\ q = \frac{p}{3} \cdot q \end{cases} .$$

Süsteemi teine võrrand saab kehtida siis, kui $q = 0$ või $p = 3$. Kui $q = 0$, siis esimese võrrandi põhjal saame, et ka $p = 0$, aga see tähendaks, et ruutvõrrandi lahendid on võrdsed. Kui $p = 3$, jääb süsteemi esimene võrrand kujule

$$3 = -(1 + q) ,$$

kust saame $q = -4$. Võrrandi lahendid 1 ja -4 on tõepoolest erinevad, seega ainuke ülesande vastuseks sobiv arvupaar on $(3, -4)$.

10.18 Vastus: ei.

Viète'i teoreemi põhjal teame, et $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 x_2 = q$. Seega peaks kehtima võrdused

$$\begin{aligned} 1995 &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = p^2 - 4q , \end{aligned}$$

millest järeldub $p^2 = 1995 + 4q$. See pole võimalik, sest $1995 + 4q$ annab 4-ga jagades jäägi 3, aga täisarvude ruudud saavad 4-ga jagades anda ainult jäägi 0 või 1.

10.19 Olgu võrrandi lahendid x_1 ja x_2. Viète'i teoreemi põhjal teame, et $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1x_2 = 12$. Arvude x_1 ja x_2 vahe on 1 parajasti siis, kui nende vahe ruut on 1. Avaldame

$$\begin{aligned}1 &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 48\,.\end{aligned}$$

Järelikult kehtib võrdus $1 = p^2 - 48$ ehk $p^2 = 49$, mistõttu kordaja p kohale sobivad parajasti ainult arvud 7 ja -7.

10.20 Vastus: sobivad kõik nelikud kujul $(a, 0, -a, 0)$, kus a on suvaline reaalarv, ja nelik $(1, -2, 1, -1)$.

Viète'i valemite põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a = -(c+d) \\ b = c \cdot d \\ c = -(a+b) \\ d = a \cdot b \end{cases}.$$

Asendus süsteemi esimesest ja teisest võrrandist kolmandasse annab

$$\begin{aligned}c &= -(-(c+d) + cd)\,,\\ c &= c + d - cd\,,\\ 0 &= d(1-c)\,.\end{aligned}$$

Niisiis tuleb läbi vaadata kaks juhtu.

Kui $d = 0$, siis süsteemi teise võrrandi põhjal ka $b = 0$ ning kolmanda võrrandi põhjal $c = -a$. Kuna võrrandi $x^2 + ax = 0$ lahendid on 0 ja $-a$ ning võrrandi $x^2 - ax = 0$ lahendid on 0 ja a, sobivad kõik nelikud kujul $(a, 0, -a, 0)$.

Kui $d \neq 0$, siis ülaltuletatud võrduse põhjal $c = 1$. Süsteemi teisest võrrandist saame siis $b = d$. Kuna järelikult ka $b \neq 0$, saame süsteemi neljandast võrrandist $a = 1$. Süsteemi esimene võrrand annab nüüd $1 = -(1 + d)$, millest saame $d = -2$ ja järelikult ka $b = -2$. Kuna võrrandi $x^2 + x - 2 = 0$ lahendid on tõepoolest 1 ja -2, sobib vastuseks ka nelik $(1, -2, 1, -1)$.

10.21 Kuna ruutvõrrandi puhul $a \neq 0$, võime võrrandi taandada ja kasutada taandadud võrrandi $x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$ jaoks Viète'i teoreemi, millest saame

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Avaldame $x_1^3 + x_2^3$ ja $x_1^3x_2^3$. Kõigepealt saame

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ &= -\frac{b}{a}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}\,.\end{aligned}$$

Kuna teisest küljest

$$x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 = \frac{c^3}{a^3}\,,$$

on x_1^3 ja x_2^3 ruutvõrrandi $x^2+\left(\frac{b^3}{a^3}-3\frac{bc}{a^3}\right)+\frac{c^3}{a^3}=0$ lahenditeks. Korrutades saadud võrrandi mõlemaid pooli a^3-ga, jäävad lahendid samaks ja tulemuseks on täisarvuliste kordajatega võrrand $a^3x^2+(b^3-3abc)x+c^3=0$, mis sobibki otsitavaks.

10.22 Vastus: $a=0$ on ainus võimalus.

Olgu ülesande võrrandi lahendid k, l ja m. Viète'i valemite põhjal teoreemist 10.8 teame siis, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} 0 &= k+l+m\,, \\ -1 &= kl+lm+mk\,, \\ a &= -klm\,. \end{aligned}$$

Tõstame esimese võrduse ruutu ning kasutame teisendamisel teist võrdust:

$$0=(k+l+m)^2=k^2+l^2+m^2+2(kl+lm+mk)=k^2+l^2+m^2-2\,,$$

millest omakorda järeldub võrdus

$$k^2+l^2+m^2=2\,.$$

Kuna k, l ja m peavad olema erinevad täisarvud, saavad nad olla ainult $-1, 0$ ja 1 mingis järjekorras. Igal juhul $a=-klm=0$.

10.23 Vastus: 0 ja 4.

Olgu ülesande ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2 Viète'i valemitest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1x_2=a \end{cases}.$$

Niisiis tuleb leida võrrandi

$$x_1x_2=x_1+x_2$$

täisarvulised lahendid. Paneme tähele, et $x_1=1$ ei sobi, sest võrrandil $x_2=1+x_2$ pole lahendeid. Eeldusel $x_1\neq 1$ saame teisendada

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= x_1+x_2\,, \\ x_2(x_1-1) &= x_1\,, \\ x_2 &= \frac{x_1}{x_1-1}\,. \end{aligned}$$

Avaldis $\frac{x_1}{x_1-1}$ on täisarvulise x_1 korral täisarv ainult siis, kui $x_1-1=\pm1$, st parajasti juhtudel $x_1=0$ ja $x_1=2$. Siis vastavalt ka $x_2=0$ ja $x_2=2$ ning $a=0$ ja $a=4$.