10. Polünoomid

10.1 Polünoomi mõiste

Definitsioon 10.1 *n. astme* *polünoomiks* (ehk *hulkliikmeks*) *muutuja x suhtes nimetame avaldist*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0\,,$$

kus kordajad a_i kuuluvad mingisse etteantud hulka A. Kui polünoomi pealiige $a_n = 1$, siis ütleme, et tegemist on taandatud polünoomiga.

Polünoomid on näiteks x^{2024}, $x^3 + x - 1$ ja $x^2 - \frac{17}{2}$, aga ka x ja 1.

Olümpiaadidel esinevad kõige sagedamini täis- ja reaalarvuliste kordajatega polünoomid, kuid võimalusi on veel. Näiteks võivad kordajad ise olla hulkliikmed mingi teise muutuja suhtes; sel juhul saame tulemuseks mitmemuutujapolünoomid.

■ **Näide 10.1** Polünoomi $x^2y^2+x^2y-xy^2-xy+3x$ saame kirjutada nii ruutpolünoomina muutuja x suhtes kujul

$$(y^2+y)x^2-(y^2+y-3)x$$

kui ka ruutpolünoomina muutuja y suhtes kujul

$$(x^2-x)y^2+(x^2-x)y+3x\,.$$

■

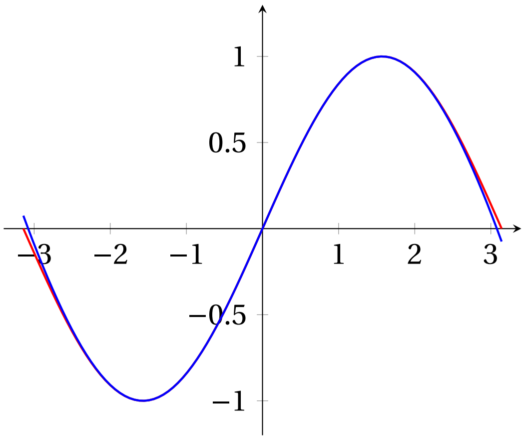
Miks polünoomid üldse huvitavad on? Ühest küljest selle pärast, et nende väärtusi on väga lihtne arvutada – tarvis läheb ainult liitmist, lahutamist ja korrutamist. Teisest küljest aga on nende abil võimalik arvutada ligikaudselt palju keerukamate funktsioonide väärtusi.

■ **Näide 10.2** Kuidas arvutada siinusfunktsiooni väärtust? Loomulikult kalkulaatori või arvutiga. Aga kuidas kalkulaator ja arvuti seda teevad? Osutub, et just nimelt polünoomide abil. Vaatleme hulkliiget

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7\,.$$

Vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ lähendab polünoom p siinusfunktsiooni nii hästi, et viga jääb alla 0,02%.

Vahemiku $[-\pi, \pi]$ otspunktide läheduses on viga juba silmaga nähtav, aga ikka veel väga väike. Joonisel tähistab punane joon siinuse tõelist väärtust ja sinine joon polünoomi p graafikut.



Küsimus, miks just polünoom p siinusfunktsiooni nii hästi lähendab ja millised polünoomid sobivad teistsuguste funktsioonidega, jääb selle raamatu raamidest välja. Oluline on aga meelde jätta, et polünoomid võimaldavad taandada keerukate funktsioonide arvutamise lihtsatele operatsioonidele nagu liitmine, lahutamine ja korrutamine. ∎

Harjutus 10.1 Võta mõni programm, mis oskab joonistada funktsioonide graafikuid (näiteks GeoGebra[a]).

1. Uuri näite 10.2 polünoomi p laiemas piirkonnas, näiteks $[-2\pi, 2\pi]$. Kui hästi p siinusfunktsiooni seal lähendab?
2. Polünoomi p avaldist uurides torkab silma, et $1 = 1!$, $6 = 3!$, $120 = 5!$ ja $5040 = 7!$. Selline kokkusattumus ei saa olla juhuslik ja ega ta ei olegi. Mis juhtub siis, kui polünoomile sama reegli järgi liikmeid juurde lisada? Mitu liiget tuleks lisada, et lähendusviga vahemikus $[-2\pi, 2\pi]$ oleks väiksem kui $0,011$?

[a] https://www.geogebra.org/

Üks oluline näitaja polünoomi käitumise kohta on see, millistel argumendi väärtustel on polünoomi enda väärtus 0.

Definitsioon 10.2 Neid argumendi väärtusi, millel polünoom omandab väärtuse 0, nimetatakse polünoomi *nullkohtadeks* ehk *juurteks*.

Ülesanded

Ülesanne 10.1 (Lõppvoor 1997, 9. klass) Leia niisugused täisarvud $a \neq 0$, b ja c, et arv $x = 2 + \sqrt{3}$ ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendiks.

Ülesanne 10.2 (Piirkonnavoor 2021, 11. klass) Leia täisarvuliste kordajatega mittenull-polünoom, mille üks juur on $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Ülesanne 10.3 (Piirkonnavoor 1997, 10. klass) On teada, et võrrandil $ax^2+bx+c=0$ puuduvad reaalarvulised lahendid ja $a+b+c>0$. Tõesta, et $c>0$.

Lahendused

10.1 Kui $x=2+\sqrt{3}$, siis $x^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$. Järelikult

$$x^2-4x=7+4\sqrt{3}-4\cdot(2+\sqrt{3})=7-8=-1\,.$$

Saadud võrduse võime kirjutada kujul $x^2-2x+1=0$, niisiis sobivad väärtused $a=1$, $b=-4$ ja $c=1$.

10.2 Olgu $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; järelikult $\sqrt[3]{3}=x-\sqrt{2}$. Tõstes viimase võrduse mõlemad pooled kuupi, saame

$$3=x^3-3\sqrt{2}x^2+3\cdot 2x-2\sqrt{2}\,,$$

millest omakorda

$$\sqrt{2}(3x^2+2)=x^3+6x-3\,.$$

Selle võrduse mõlema poole ruutu tõstmine annab

$$2(9x^4+12x^2+4)=x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x$$

ehk pärast sarnaste liikmete koondamist

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0\,.$$

Järelikult sobib otsitavaks polünoomiks $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$.

10.3 Lihtne on näha, et $a+b+c$ on ruutpolünoomi ax^2+bx+c väärtus kohal 1. Kuna selle polünoomi graafik ei lõika x-telge ja tema väärtus kohal 1 on positiivne, paikneb vaadeldav graafik tervenisti x-teljest kõrgemal. Järelikult on positiivne ka polünoomi väärtus kohal 0 ehk $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$.

10.2 Tehted polünoomidega

Polünoomid käituvad paljuski täisarvude sarnaselt. Neid saab liita, lahutada, korrutada ja jäägiga jagada. Liitmine ja lahutamine käib liikmeti, korrutamisel koondame sama astmega liikmed.

▪ **Näide 10.3** Olgu antud polünoomid $P(x)=2x+3$ ja $Q(x)=x^2-x-2$. Siis

$$\begin{aligned}
P(x)+Q(x)&=(2x+3)+(x^2-x-2)=x^2+x+1\,,\\
P(x)-Q(x)&=(2x+3)-(x^2-x-2)=-x^2+3x+5\,,\\
P(x)\cdot Q(x)&=(2x+3)\cdot(x^2-x-2)=\\
&=2x^3-2x^2-4x+3x^2-3x-6=\\
&=2x^3+x^2-7x-6\,.
\end{aligned}$$

▪

Polünoomide jäägiga jagamine sarnaneb täisarvude jäägiga jagamisele, lihtsalt järkude kaupa jagamise asemel jagame astmete kaupa. Asi saab selgemaks näite varal.

■ **Näide 10.4** Jagame polünoomi x^4+2x^3-x+3 polünoomiga x^2-x-3, st otsime niisuguseid polünoome $Q(x)$ ja $R(x)$, et

$$x^4+2x^3-x+3=(x^2-x-3)\cdot Q(x)+R(x)\,.$$

Kirjutame otsitava $Q(x)$ kohale tühjad sulud, jätame jagatavasse puuduva liikme x^2 kohale veidi ruumi ja saame järgmise üleskirjutuse.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(\qquad\qquad) \end{array}$$

Jagatava kõrgeima astme liige on x^4, jagajal aga x^2. Nende jagatis on x^2, mis annabki jagatispolünoomi $Q(x)$ esimese liikme.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2\qquad\quad) \end{array}$$

Sarnaselt täisarvude pika jagamisega leiame osakorrutise $x^2\cdot(x^2-x-3)=x^4-x^3-3x^2$ ja lahutame selle jagatavast (st liidame vastandpolünoomi $-x^4+x^3+3x^2$) kuni astmeni x^2.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2\qquad\quad) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \end{array}$$

Tuues jagatavast juurde järgmise astme liikme $-x$, tuleb järgmiseks jagada polünoomi $3x^3+3x^2-x$. Jagades selle pealiikme $3x^3$ jälle jagaja pealiikmega x^2 on tulemuseks $3x$, mis annab meile jagatise $Q(x)$ teise liikme.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x\quad) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \end{array}$$

Lahutame $3x\cdot(x^2-x-3)=3x^3-3x^2-9x$ vahetulemusest ja toome juurde jagatava viimase liikme 3.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x\quad) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\ & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +8x & +3 & \end{array}$$

Viimase vahetulemuse pealiikme $6x^2$ ja jagaja pealiikme x^2 jagatis on 6, mis annabki otsitava jagatise viimase liikme. Lahutame $6\cdot(x^2-x-3)=6x^2-6x-18$ viimasest vahetulemusest.

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & =(x^2-x-3)(x^2+3x+6) \\ -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{1-3} & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\ & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +8x & +3 & \\ & & -6x^2 & +6x & +18 & \\ \cline{3-5} & & & 14x & +21 & \end{array}$$

Järele jääb lineaarpolünoom $14x+21$, mille pealiikme aste on väiksem kui jagaja aste. See tähendab, et jagamine on lõppenud ja $14x+21$ on jagamisel tekkinud jääk.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & = (x^2-x-3)(x^2+3x+6)+14x+21 \\
-x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\
\hline
 & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\
 & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\
\hline
 & & 6x^2 & +8x & +3 & \\
 & & -6x^2 & +6x & +18 & \\
\hline
 & & & 14x & +21 &
\end{array}
$$

■

Harjutus 10.2 Kontrolli lahti korrutades, et

$$(x^2-x-3)(x^2+3x+6)+14x+21 = x^4+2x^3-x+3\,.$$

Ülesanne 10.4 (Talvine lahtine võistlus 2010, noorem rühm) Olgu x selline reaalarv, et $x^3+2x+2=0$. Leia avaldise $x^5+2x^2-4x+2010$ väärtus.

Lahendus. Vastus: 2014.

Jagame polünoomi $x^5+2x^2-4x+2010$ jäägiga polünoomiga x^3+2x+2:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^5 & & +2x^2 & -4x & +2010 = (x^3+2x+2)(x^2-2)+2014 \\
-x^5 & -2x^3 & -2x^2 & & \\
\hline
 & -2x^3 & & -4x & +2010 \\
 & 2x^3 & & +4x & +4 \\
\hline
 & & & & 2014
\end{array}
$$

Kuna ülesande tingumuste põhjal $x^3+2x+2=0$, saame

$$x^5+2x^2-4x+2010 = (x^3+2x+2)(x^2-2)+2014 = 0\cdot(x^2-2)+2014 = 2014\,.$$

10.3 Polünoomide tegurdamine

Nagu ka täisarvude puhul, pakub polünoomide jäägiga jagamise juures erilist huvi olukord, kus jääk on null.

Definitsioon 10.3 Ütleme, et polünoom $P(x)$ *jagub* polünoomiga $Q(x)$ ja kirjutame $P(x) \vdots Q(x)$, kui nende jagamisel tekkiv jääk on 0, st leidub selline polünoom $S(x)$, et

$$P(x) = S(x)\cdot Q(x)\,.$$

Sama seose kohta ütleme ka, et polünoom $Q(x)$ *jagab* polünoomi $P(x)$, ja kirjutame $Q(x) \mid P(x)$.

Täisarvude vallast tuttavale algarvu mõistele vastab polünoomide puhul taandumatuse omadus. Kui algarvu p korral on tema ainus tegurdus triviaalne $1\cdot p$ (ja negatiivseid tegureid arvestades ka $(-1)\cdot(-p)$), siis polünoomidel on triviaalseid tegurdusi rohkem. Nii näiteks võime hulkliikme $2x^2+4x-6$ esitada kujul

$$2x^2+4x-6=1\cdot(2x^2+4x-6)=2\cdot(x^2+2x-3)=4\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)$$

jne, aga need esitused ei anna meile tema omaduste kohta uut informatsiooni. Huvitavaks läheb asi alles siis, kui tegurite aste on madalam kui tegurdatava aste ja suurem kui 0.

Definitsioon 10.4 Ütleme, et n. astme polünoom $P(x)$ on *taanduv*, kui leiduvad polünoomid $R(x)$ ja $S(x)$ nii, et nende aste on vähemalt 1 ja

$$P(x)=R(x)\cdot S(x).$$

Kui niisuguseid polünoome $R(x)$ ja $S(x)$ ei leidu, nimetame polünoomi $P(x)$ *taandumatuks*.

NB! Ära aja sassi taandumatu ja taandatud polünoomi mõisteid! Polünoom on **taandumatu**, kui tal ei leidu mittetriviaalset tegurdust, ja **taandatud**, kui tema pealiikme kordaja on 1!

Harjutus 10.3 Kas polünoom x^2-x+1 on taanduv või taandumatu? (Otsime reaalarvuliste kordajatega tegureid.)

Lahendus. Kui polünoom x^2-x+1 oleks taanduv, peaksid leiduma esimese astme reaalpolünomid $ax+b$ ja $cx+d$ nii, et

$$x^2-x+1=(ax+b)(cx+d).$$

Paneme tähele, et sel juhul peaksid antud polünoomil leiduma reaalarvulised nullkohad $-\frac{b}{a}$ ja $-\frac{d}{c}$. Tõepoolest, $a\neq 0$ ja $c\neq 0$, sest muidu poleks $ax+b$ ja $cx+d$ esimese astme polünoomid, ja lisaks

$$a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0 \quad \text{ning} \quad c\cdot\left(-\frac{d}{c}\right)+d=-d+d=0.$$

Ruutvõrrandi

$$x^2-x+1=0$$

diskriminant on aga $-1-4\cdot 1=-5<0$, seega polünoomil x^2-x+1 ei leidu reaalarvulisi nullkohti. Järelikult peab ta olema taandumatu.

Ülesandes 10.3 tundis tähelepanelik lugeja loodetavasti ära järgmise kooliõpikust pärineva tulemuse, mis annab üldise eeskirja ruutkolmliikmete tegurdamiseks.

Teoreem 10.1 Kui ruutvõrrandil $ax^2+bx+c=0$ on lahendid x_1 ja x_2, siis kehtib iga reaalarvu x korral võrdus

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ülesanne 10.5 (Lõppvoor 1995, 9. klass) Leia kõik täisarvud n, mille korral $4n^2+16n-65$ on algarv.

Lahendus. Vastus: sobivad $n=-7$ ja $n=3$.

Ülesande ruutkolmliikme tegurdamiseks vaatleme n-i reaalarvulise muutujana ja lahendame ruutvõrrandi $4n^2+16n-65=0$. Ruutvõrrandi lahendivalem annab

$$n_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 4\cdot(-65)}}{2\cdot 4}=\frac{-16\pm\sqrt{1296}}{8}=\frac{-16\pm 36}{8}.$$

Niisiis $n_1=-\dfrac{13}{2}$ ja $n_2=\dfrac{5}{2}$, mistõttu teoreemist 10.1

$$4n^2+16n-65=4\cdot\left(n+\frac{13}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)=(2n+13)(2n-5)$$

iga reaalarvu, aga järelikult ka iga täisarvu n jaoks.

Korrutis $(2n+13)(2n-5)$ saab täisarvulise n korral anda algarvu ainult siis, kui $2n+13=\pm1$ või $2n-5=\pm1$. Võimalikud n väärtused on seega $-7,-6,2$ ja 3. Leiame uuritava avaldise väärtuse nende n-ide jaoks.

$$\begin{aligned}(2\cdot(-7)+13)(2\cdot(-7)-5)&=(-1)\cdot(-19)=19,\\(2\cdot(-6)+13)(2\cdot(-6)-5)&=1\cdot(-17)=-17,\\(2\cdot 2+13)(2\cdot 2-5)&=17\cdot(-1)=-17,\\(2\cdot 3+13)(2\cdot 3-5)&=19\cdot 1=19.\end{aligned}$$

Kuna -17 pole algarv, sobivad ainult $n=-7$ ja $n=3$.

Harjutuses 10.3 nägime, et reaalarvuliste kordajatega polünoomi juure leidumine on tihedalt seotud lineaarteguri leidumisega. Osutub, et need omadused ongi samaväärsed. Järgmist teoreemi tuntakse ka Bézout' väikese teoreemi[1] nime all.

Teoreem 10.2 Olgu $P(x)$ reaalarvuliste kordajatega polünoom ja $a\in\mathbb{R}$. Polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x-a$ tekkiv jääk on $P(a)$. Muuhulgas on a polünoomi $P(x)$ juureks parajasti siis, kui $(x-a)\mid P(x)$.

Tõestus. Jagame polünoomi $P(x)$ jäägiga polünoomiga $x-a$. Kuna $x-a$ on 1. astme polünoom ja jääk on jagajast madalam astmega, saab jääk olla ainult 0. astme ehk konstantne polünoom; olgu ta näiteks c. Tähistades jagatise $Q(x)$ saame

$$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+c.$$

See võrdus kehtib muutuja x iga väärtuse korral, muuhulgas ka siis, kui $x=a$. See asendus annab

$$P(a)=(a-a)\cdot Q(a)+c=0\cdot Q(a)+c=c;$$

teisisõnu – polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x-a$ tekkiv jääk ongi täpselt $P(a)$.

Nüüd on lihtne näha, et a on polünoomi $P(x)$ juureks (st $P(a)=0$) parajasti siis, kui $P(x)$ avaldub kujul $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$ mingi polünoomi $Q(x)$ korral, st $(x-a)\mid P(x)$. □

[1] Étienne Bézout [bezu:] (1730 – 1783) oli tuntud prantsuse matemaatik.

Teoreemi 10.2 saab kasutada polünoomi lineaartegurite otsimiseks. Lihtne võimalus selleks on proovida läbi näiteks $a = 1$, $a = 2$, $a = -1$ jne ning kui mõni neist osutub $P(x)$ juureks, olemegi leidnud lineaarteguri $x - a$.

Eriti lihtne on kontrollida, kas $a = 1$ on juur või mitte. Selle juures osutub kasulikuks järgmine teoreem.

Teoreem 10.3 Polünoomi kordajate summa võrdub tema väärtusega kohal 1.

Tõestus. Olgu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \,.$$

Kuna iga i korral $1^i = 1$, saame

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1^1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \,.$$

□

Teoreemist 10.3 saamegi lihtsa kriteeriumi otsustamaks, kas 1 on vaadeldava polünoomi juur.

Teoreem 10.4 Arv 1 on polünoomi $P(x)$ juureks (ja seega ka $P(x) \vdots (x-1)$) parajasti siis, kui selle polünoomi kordajate summa on 0.

Harjutus 10.4 Polünoomi kordajate põhjal saab lihtsasti otsustada ka seda, kas -1 on antud polünoomi juureks või ei. Kuidas?

Ülesanded

Ülesanne 10.6 (Lõppvoor 2021, 9. klass) Lahenda võrrand

$$x^2 + 11 = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Ülesanne 10.7 (Piirkonnavoor 2018, 10. klass) Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 10.8 (Lõppvoor 2013, 10. klass) Kas hulkliiget $x^4 + x^2 + 1$ saab esitada korrutisena hulkliikmetest, kus muutuja x astendaja on väiksem kui 4 ja kõik kordajad on reaalarvud?

Ülesanne 10.9 (Lõppvoor 2018, 12. klass) Tõesta, et mistahes positiivse reaalarvu x korral

$$(x+1)(x+2)(x+5) \geqslant 36x \,.$$

Ülesanne 10.10 (Lõppvoor 1994, 9. klass) Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral kehtib seos

$$2a^2b = a^3 + b^3 .$$

Ülesanne 10.11 (Sügisene lahtine võistlus 2008, vanem rühm) Avaldises $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2008}$ viiakse astendamine läbi ja koondatakse sarnased liikmed. Tõesta, et vähemalt üks saadav hulkliikme kordajatest on negatiivne.

Ülesanne 10.12 (Sügisene lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Kas kehtib väide, et suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$, mille väärtus iga täisarvulise argumendi x korral on kordarv, avaldub kujul $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$, kus Q ja R on täisarvuliste kordajatega polünoomid, mis pole konstantselt 1 ega -1?

Ülesanne 10.13 (Lõppvoor 2015, 11. klass) Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n , mis esituvad mingi algarvu positiivse täisarvulise astmena ja mille korral võrrandil

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = n$$

leidub täisarvuline lahend.

Ülesanne 10.14 (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Leia kõik sellised reaalarvude paarid (x, y), et

$$x^9 + 4x^6 y + 6x^3 y^2 + 4y^3 = 0 .$$

Lahendused

10.6 Korrutame mõlemad võrrandi pooled muutujaga x ning viime kõik liikmed ühele poole. Tulemusena teiseneb antud võrrand kujule

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 .$$

Näeme, et $1 - 6 + 11 - 6 = 0$, järelikult on 1 vaadeldava võrrandi üheks lahendiks ja polünoomi $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ juureks. Teoreemi 10.2 põhjal peab see polünoom jaguma polünoomiga $x - 1$. Teeme jagamise läbi.

$$\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & = (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\
\underline{-x^3 + x^2} & \\
-5x^2 + 11x & \\
\underline{5x^2 - 5x} & \\
6x - 6 & \\
\underline{-6x + 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Selleks, et korrutis võrduks nulliga, peab nulliga võrduma üks teguritest. Järelikult saame antud võrrandi ülejäänud lahendid leida ruutvõrrandist

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

mille lahenditeks on 2 ja 3. Algse võrrandi lahendid on seega 1, 2 ja 3.

10.7 Kui midagi paremat pähe ei tule, katsetame asendusvõttega. Esimesest võttandist saame $y = 2 - x^2$ ning selle asendamine teise võrrandisse annab

$$
\begin{gathered}
(2 - x^2)^2 + x - 2 = 0\,, \\
x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0\,.
\end{gathered}
$$

Neljanda astme võrrandit nähes pole veel vaja ehmuda. Võibolla on mõned tema lahendid lihtsalt ära arvatavad? Tõepoolest, kuna $1 - 4 + 1 + 2 = 0$ teame kohe, et $x = 1$ sobib lahendiks. Jagame polünoomi $x^4 - 4x^2 + x + 2$ läbi polünoomiga $x - 1$ ja saame

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & & -4x^2 & +x & +2 & = (x-1)(x^3+x^2-3x-2) \\
\underline{-x^4} & \underline{+x^3} & & & & \\
 & x^3 & -4x^2 & & & \\
 & \underline{-x^3} & \underline{+x^2} & & & \\
 & & -3x^2 & +x & & \\
 & & \underline{3x^2} & \underline{-3x} & & \\
 & & & -2x & +2 & \\
 & & & \underline{2x} & \underline{-2} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Korrutis saab olla null ainult siis, kui üks teguritest on null. Algse võrrandi ülejäänud lahendid leiame järelikult võrrandist

$$
x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0\,.
$$

Selle lahendeid otsides proovime läbi absoluutväärtuselt väikeseid muutuja x väärtusi, kuni leiame, et $x = -2$ puhul $(-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$. Oleme leidnud teise lahendi ja ülejäänud lahendite leidmiseks jagame polünoomi $x^3 + x^2 - 3x - 2$ polünoomiga $x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & +x^2 & -3x & -2 & = (x+2)(x^2-x-1) \\
\underline{-x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & -x^2 & -3x & & \\
 & \underline{x^2} & \underline{+2x} & & \\
 & & -x & -2 & \\
 & & \underline{x} & \underline{+2} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Niisiis oleme esitanud

$$
x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x+2)(x^2 - x - 1)
$$

ja algse võrrandi ülejäänud lahendite leidmiseks piisab lahendada ruutvõrrand

$$
x^2 - x - 1 = 0\,.
$$

Selle lahenditeks on $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Oleme saanud kõik võimalikud muutuja x väärtused. Leides vastavad y väärtused võrrandist $y = 2 - x^2$, saame kokkuvõtteks lahendid

$(1,1)$, $(-2,-2)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ja $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Kontroll näitab, et kõik need sobivad ka algse võrrandisüsteemi lahenditeks.

10.8 4. astme hulkliikme tegurdamisel peab tekkima kas kaks ruutpolünoomi või vähemalt üks lineaarpolünoom.

Uurime kõigepealt lineaarpolünoomi saamise võimalust. Teoreemi 10.2 põhjal peaks antud hulkliikmel sel juhul leiduma reaalarvuline juur. Muutujavahetusega $y = x^2$ saame ruutvõrrandi

$$y^2 + y + 1 = 0$$

mille determinant $1 - 4 \cdot 1 = -3$ on negatiivne. Järelikult pole sellel võrrandil reaalarvulisi lahendeid, mistõttu pole hulkliikmel $x^4 + x^2 + 1$ ka reaalarvulisi juuri.

Jääb üle ainult võimalus, et see hulkliige esitub kahe ruutpolünoomi korrutisena. Nii hulkliikme $x^4 + x^2 + 1$ pealiikme kui ka vabaliikme kordaja on 1. Proovime, kas me suudame teguriteks leida ruutpolünoomid, mille ruut- ja vabaliikme kordajad on samuti 1, st otsime tegurdust kujul

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 \qquad + 1)(x^2 \qquad + 1)\,.$$

Kuna $(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$, siis peab vähemalt ühes teguris esinema ka lineaarliige. See omakorda tähendab, et lahti korrutades saame nii 1. kui 3. astme liikmeid, mis peavad lõpptulemusest välja koonduma. Seega on mõtet proovida ühte tegurisse lineaarliiget pluss- ja teise miinusmärgiga. Kõige lihtsam valik $+x$ ja $-x$ viib kohe sihile, sest võrdus

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

osutub tõeseks. Oleme leidnud otsitava tegrduse.

10.9 Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist leiame, et ülesande võrratus on samaväärne võrrarusega

$$x^3 + 8x^2 - 19x + 10 \geqslant 0\,.$$

Paneme tähele, et võrratuse vasaku poole polünoomi kordajate summa on 0, järelikult jagub see polünoom teoreemi 10.4 põhjal kaksliikmega $x - 1$. Teeme jagamise läbi:

$$\begin{array}{rl}
x^3 + 8x^2 - 19x + 10 & = (x-1)(x^2+9x-10) \\
\underline{-x^3 + x^2} \qquad\qquad\quad & \\
9x^2 - 19x \qquad & \\
\underline{-9x^2 + 9x} \qquad & \\
-10x + 10 & \\
\underline{10x - 10} & \\
0 &
\end{array}$$

Järgmiseks tegurdame jagatiseks saadud polünoomi $x^2 + 9x - 10$. Selleks on mitu võimalust. Kuna ka selle polünoomi kordajate summa on 0, saame jälle kasutada teoreemi 10.4. Teine võimalus on lahendada ruutvõrrand $x^2 + 9x - 10 = 0$ ja leida tegurdus teoreemi 10.1 abil. Kolmas võimalus on Viète'i valemite abil (vt jaotis 10.5) tegurdus lihtsalt ära arvata. Igal juhul saame, et $x^2+9x-10=(x-1)(x+10)$.

Kokkuvõttes $x^3+8x^2-19x+10=(x-1)^2(x+10)$. Kuna iga positiivse reaalarvu x korral kehtivad võratused $(x-1)^2 \geqslant 0$ ja $x+10>0$, saamegi neid korrutades ülesande võrratuse tõestada.

10.10 Vastus: sobivad parajasti kõik täisarvude paarid (a,b), kus $a=b$.

Lahenduse võtme annab tähelepanek, et ülesande võrrand on *homogeenne*, st kõigi temas esinevate üksliikmete koguaste on sama (antud juhul 3). Homogeense kahemuutujavõrrandi eelis seisneb selles, et teda saab lihtsasti teisendada ühemuutujavõrrandiks.

Kõigepealt paneme tähele, et kui $b=0$, siis ka $a=0$. Juhul $b\neq 0$ saame võrrandi mõlemad pooled jagada suurusega b^3. Pärast muutujavahetust $c=\dfrac{a}{b}$ on tulemuseks võrrand $2c^2=c^3+1$ ehk

$$c^3-2c^2+1=0\,.$$

Ülesande lahendamiseks on vaja leida kõik selle võrrandi ratsionaalarvulised lahendid.

Polünoomi c^3-2c^2+1 kordajate summa on 0, seega teoreemi 10.4 põhjal on 1 tema juureks (milles saab muidugi veenduda ka otse, arvutades, et $1^3-2\cdot 1^2+1=0$). Niisiis saame selle polünoomi tegurdada, jagades teda polünoomiga $c-1$:

$$\begin{array}{rrrl}
c^3-2c^2 & & +1 & =(c-1)(c^2-c-1)\\
\underline{-c^3+c^2} & & & \\
-c^2 & & & \\
\underline{c^2} & \underline{-c} & & \\
 & -c & +1 & \\
 & \underline{c} & \underline{-1} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Võrrandi

$$(c-1)(c^2-c-1)=0$$

lahend $c=1$ tähendab $\dfrac{a}{b}=1$ ehk $a=b$. Ülejäänud lahendid saavad pärineda ainult võrrandist

$$c^2-c-1=0\,,$$

aga selle lahendid $c_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ pole ratsionaalarvud.

Kokkuvõtteks on lahenditeks parajasti kõik täisarvude paarid (a,b), kus $a=b$.

10.11 Olgu $P(x)$ polünoom, mis saadakse ülesande avaldise läbiastendamisel ja sarnaste liikmete koondamisel. Polünoomi pealiikme x^{8032} kordaja on 1 ja vabaliige on 2^{2008}. Teoreemi 10.3 põhjal on selle polünoomi kordajate summa

$$P(1)=(1^4+1^3-3\cdot 1^2+1+2)^{2008}=2^{2008}\,.$$

Kuna tema pea- ja vabaliikmete summa on $2^{2008}+1$, peab mõne liikme kordaja olema ka negatiivne.

10.12 Vastus: ei.

Kontranäiteks sobib polünoom $P(x) = x^2 - x + 4$.

Iga täisarvu x korral on x^2 ja x sama paarsusega, järelikult on $x^2 - x$ ja $x^2 - x + 4$ paarisarvud. Teisest küljest kehtib võrdus $x^2 - x = (x-1)x$. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on alati mittenegatiivne, seega iga täisarvu x korral kehtib võrratus $x^2 - x + 4 \geqslant 4$. Järelikult on $x^2 - x + 4$ iga täisarvu x korral kordarv.

Polünoomi $P(x) = x^2 - x + 4$ pealiikme kordaja on 1. Kui ta esituks kahe täisarvuliste kordajatega polünoomi korrutisena, peaks nende pealiikmete kordajad olema kas 1 või -1. Kuna ülesande tingimuste põhjal ei saa need tegurid olla konstantselt 1 ega -1, peaks $P(x)$ tegurduma lineaartegurite korrutiseks. See tähendaks omakorda, et polünoomil $P(x)$ peaks leiduma juur, aga ruutvõrrandil $x^2 - x + 4 = 0$ pole lahendeid. Niisiis ei saa polünoomi $P(x) = x^2 - x + 4$ ülesandes kirjeldatud viisil tegurdada.

10.13 Lihtne on näha, et polünoomi $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ kordajate summa on 0, seega teoreemi 10.4 põhjal on 1 tema juureks. Järelikult jagub see polünoom lineaarpolünoomiga $x - 1$. Läbi jagades saame:

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1) \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\qquad -x^2 + 2x \\
\qquad \underline{x^2 - x} \\
\qquad\qquad x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Paneme tähele, et $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$, järelikult peavad täisarvud $x-1$ ja $x^2 - x + 1$ olema ühistegurita. Lisaks näeme, et kuna ruutpolünoomi $x^2 - x + 1$ diskriminant $(-1)^2 - 4 = -3 < 0$, omandab ta ainult positiivseid väärtusi. Hulkliikmete $x - 1$ ja $x^2 - x + 1$ korrutis peab täisarvulisel kohal x olema mingi algarvu p positiivne täisarvuline aste, järelikult on ainus võimalus, et üks neist on $p^0 = 1$ ja teine p^a, kus a on positiivne täisarv.

Kui $x - 1 = 1$, siis $x = 2$ ja $x^2 - x + 1 = 3$, mis annab lahendi $n = 3^1$. Kui $x^2 - x + 1 = 1$, siis $x^2 - x = 0$, kust saame $x = 1$ või $x = 0$. Siis aga vastavalt $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ ja $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = -1$, mis kumbki ei sobi.

Järelikult on ainsaks lahendiks $n = 3$.

10.14 Vastus: lahendiks sobivad parajasti kõik reaalarvupaarid kujul $\left(x, -\frac{x^3}{2}\right)$.

Ülesande võrrandis on tegemist kahemuutujapolünoomiga, milles iga üksliikme aste[2] on pealegi veel erinev (vastavalt 9, 7, 5 ja 3). Kas me saame seda polünoomi ja vastavat võrrandit kuidagi lihtsustada?

Osutub, et saame küll. Paneme kõigepealt tähele, et muutuja x esineb ainult astmetena x^9, x^6 ja x^3 ehk $(x^3)^3$, $(x^3)^2$ ja $(x^3)^1$. See asjaolu viib mõttele kasutada muutujavahetust $z = x^3$, mille tulemusena saame võrrandi

$$z^3 + 4z^2y + 6zy^2 + 4y^3 = 0\,. \tag{10.1}$$

[2]Tuletame meelde, et üksliikme astmeks nimetame temas esinevate muutujate astmete summat.

Võrrand (10.1) on homogeenne, st kõigi temas esinevate üksliikmete aste on sama (antud juhul 3). Sama moodi nagu ülesandes 10.10 saame niisuguse võrrandi lihtsasti ühemuutujavõrrandiks teisendada.

Paneme kõigepealt tähele, et võimalus $y = 0$ annab algse võrrandi lahendiks paari $(0,0)$. Kui $y \neq 0$, võime võrrandi (10.1) mõlemaid pooli jagada suurusega y^3, misjärel saame

$$\frac{z^3}{y^3} + 4\frac{z^2}{y^2} + 6\frac{z}{y} + 4 = 0$$

ehk pärast muutujavahetust $w = \dfrac{z}{y}$

$$w^3 + 4w^2 + 6w + 4 = 0\,.$$

Väärtused $w = -1, 0, 1$ ei sobi saadud võrrandi lahendiks, aga $w = -2$ annab $(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-2) + 4 = -8 + 16 - 12 + 4 = 0$. Tegurdame polünoomi $w^3 + 4w^2 + 6w + 4$, jagades ta läbi lineaarpolünoomiga $w + 2$:

$$\begin{array}{rl}
w^3 + 4w^2 + 6w + 4 & = (w+2)(w^2 + 2w + 2) \\
\underline{-\,w^3 - 2w^2\qquad} & \\
2w^2 + 6w\quad & \\
\underline{-\,2w^2 - 4w\quad} & \\
2w + 4 & \\
\underline{-\,2w - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Võrrandi $w^2 + 2w + 2 = 0$ diskriminant $2^2 - 4\cdot 1\cdot 2$ on negatiivne, järelikult sellel võrrandil reaalarvulisi lahendeid ei ole. Niisiis jääbki ainsaks võimaluseks $w = -2$, millest saame omakorda $z = -2y$ ja $x^3 = -2y$. Seega esituvad algse võrrandi kõik lahendid kujul $\left(x, -\dfrac{x^3}{2}\right)$ (ja muuhulgas sisaldub selles üldkujus ka lahend $(0,0)$).

10.4 Mitmemuutujapolünoomide tegurdamine

Teoreem 10.2 võimaldab leida ka mitmemuutujapolünoomide lineaartegureid. Trikk on mõelda antud mitmemuutujapolünoomist kui hulkliikmest ühe muutuja suhtes. Lahendame näitena järgmise ülesande.

Ülesanne 10.15 (Piirkonnavoor 1962) Tõesta, et hulkliige

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$$

jagub korrutisega $(b - c)(c - a)(a - b)$.

Lahendus. Vaatleme ülesande avaldist polünoomina $P(a)$ muutuja a suhtes ja näitame, et b on selle polünoomi juur. Tõepoolest,

$$P(b) = b^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - b^2) + c^3(b^2 - b^2) = 0\,.$$

Seega jagub $P(a)$ polünoomina lineaarteguriga $a - b$. Sama moodi saame ülesande avaldist vaadelda polünoomina $Q(b)$ muutuja b suhtes ning näidata, et $Q(c) = 0$, millest järeldub antud avaldise jagumine lineaarteguriga $b-c$. Analoogiliselt saame tõestada ka avaldise jagumise teguriga $c-a$.

Loomulikult saab ülesannet 10.15 lahendada ka vahetult kontrollides, et

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=-(b-c)(a-b)(c-a)(ab+bc+ca),$$

aga juurte kaudu lineaartegureid otsides on lahendust tunduvalt lihtsam leida.

Ülesande 10.15 lahenduse võttega saame tõestada järgmise väga kasuliku teoreemi.

Teoreem 10.5 Olgu $P(x)$ suvaline reaalarvuliste kordajatega (ühemuutuja)polünoom. Kahemuutujapolünoom $P(x)-P(y)$ jagub polünoomiga $x-y$.

Tõestus. Fikseerime muutuja y väärtuse mingiks suvaliseks reaalarvuks y_0. Siis on $P(x)-P(y_0)$ hulkliige muutuja x suhtes (ja $-P(y_0)$ saab osaks tema vabaliikmest). Paneme tähele, et $x=y_0$ on selle polünoomi juur, kuivõrd $P(y_0)-P(y_0)=0$. Teoreemi 10.2 põhjal tähendab see, et polünoom $P(x)-P(y_0)$ jagub polünoomiga $x-y_0$. Kuna y_0 võib võtta suvalise reaalarvulise väärtuse, olemegi tõestanud, et polünoom $P(x)-P(y)$ jagub polünoomiga $x-y$. □

Selle teoreemi esimese huvitava erijuhu saame, kui võtame $P(x)=x^n$. Teoreem 10.5 väidab siis, et $x^n-y^n \,\vdots\, x-y$. Sageli läheb vaja ka vastavat jagatist. Näitame, et kehtib järgmine võrdus:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}). \tag{10.2}$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}) &= \\ x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+x^3y^{n-3}+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}& \\ -x^{n-1}y-x^{n-2}y^2-\ldots-x^3y^{n-3}-x^2y^{n-2}-xy^{n-1}-y^n&=x^n-y^n.\end{aligned}$$

Juhtudel $n=2$ ja $n=3$ saame võrdusest (10.2) tuttavad valemid

$$\begin{aligned}x^2-y^2&=(x-y)(x+y),\\ x^3-y^3&=(x-y)(x^2+xy+y^2).\end{aligned}$$

Kas midagi sarnast kehtib ka polünoomide x^n+y^n jaoks? Jah, kuid mitte kõigi, vaid ainult paaritute n väärtuste korral. Teeme polünoomis x^n+y^n muutujavahetuse $y=-z$, misjärel saame

$$x^n+y^n=x^n+(-z)^n=x^n-z^n,$$

see polünoom aga jagub teoreemi 10.5 põhjal polünoomiga $x-z=x+y$. Analoogiliselt võrduse (10.2) tõestusega saame tekkiva jagatise ka ilmutatult leida:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots+x^2y^{n-3}-xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

Harjutus 10.5 Tõesta see võrdus paaritute n väärtuste jaoks.

Selle võrduse erijuht $n=3$ korral on jälle kooliõpikust hästi tuntud:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)\,.$$

Teoreemist 10.5 saame olulise järelduse ka täisarvuliste kordajatega polünoomide jaoks.

Teoreem 10.6 Olgu P täisarvuliste kordajatega polünoom. Suvaliste täisarvude k ja ℓ korral jagub arv $P(k) - P(\ell)$ arvuga $k - \ell$.

Tõestus. Teoreemist 10.5 teame, et polünoom $P(x) - P(y)$ jagub kaksliikmega $x - y$. Lisaks on lihtne näha, et kui P on täisarvuliste kordajatega, siis on täisarvuliste kordajatega ka jagatispolünoom. See tähendab, et leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $Q(x)$ nii, et kehtib polünoomide võrdus

$$P(x) - P(y) = Q(x) \cdot (x - y)\,.$$

Asendades $x = k$ ja $y = \ell$ näeme, et kehtib täisarvude võrdus

$$P(k) - P(\ell) = Q(k) \cdot (k - \ell)\,,$$

järelikult jagub arv $P(k) - P(\ell)$ arvuga $k - \ell$, kusjuures jagatis on $Q(k)$. □

Teoreemi 10.6 kehtivuses saab veenduda ka otse. Olgu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0\,,$$

kus $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ on täisarvud. Siis

$$P(k) - P(\ell) = a_n(k^n - \ell^n) + a_{n-1}(k^{n-1} - \ell^{n-1}) + \ldots + a_1(k^1 - \ell^1) + a_0 - a_0\,.$$

Valemist (10.2) näeme, et iga astendaja i korral $(k^i - \ell^i) \vdots (k - \ell)$. Niisiis jaguvad kõik liidetavad $P(k) - P(\ell)$ avaldises arvuga $k - l$, järelikult jagub sama arvuga ka $P(k) - P(\ell)$ ise.

Ülesanded

Ülesanne 10.16 (Piirkonnavoor 2001, 12. klass) Reaalarvude a, b ja c korrutis on 1 ning nende arvude summa on võrdne nende pöördarvude summaga. Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

Ülesanne 10.17 (Kevadine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kas jadas (a_n) üldliikmega $a_n = n^3 - (2n + 1)^2$ leidub liige, mis jagub 2006-ga?

Ülesanne 10.18 (Sügisene lahtine võistlus 2010, vanem rühm) Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mis rahuldab tingimust $P(2010) = P(201) = 2010$.

a) Kas on võimalik, et $P(2011) = 2011$?

b) Milline on vähim võimalik positiivne $P(2011)$ väärtus?

Ülesanne 10.19 (Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm)

a) Kas leidub selline täisarv c ja täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(c) \neq c$, aga $P(P(c)) = c$?

b) Kas leidub selline täisarv c ja täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(c) \neq c$ ja $P(P(c)) \neq c$, aga $P(P(P(c))) = c$?

Vaata ka ülesannet 20.12.

Lahendused

10.16 Korrutades võrduse

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

vasaku poole 1-ga ning parema poole sellega võrdse suurusega abc, saame

$$a + b + c = bc + ca + ab.$$

Võttes veelkord arvesse, et $abc = 1$, saame viimase võrduse teisendada samaväärsele kujule

$$\begin{aligned} a + b + c - bc - ca - ab &= 0, \\ -1 + a + b + c - bc - ca - ab + abc &= 0, \\ (a-1)(b-1)(c-1) &= 0. \end{aligned}$$

Viimane võrdus aga kehtib parajasti siis, kui vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

10.17 Vastus: jah.

Paneme tähele, et $2006 = 17 \cdot 118$, $a_2 = 2^3 - 5^2 = -17$ ja $a_7 = 7^3 - 15^2 = 118$. Näitame, et iga täisarvu $i \geqslant 0$ korral $a_{2+17i} \vdots 17$ ja $a_{7+118i} \vdots 118$. Tõepoolest, kuna jada (a_n) üldliige on täisarvuliste kordajatega polünoom, siis teoreemi 10.6 põhjal $a_{2+17i} - a_2 \vdots (2 + 17i - 2)$ ehk $a_{2+17i} - a_2 \vdots 17i$. Et aga $a_2 = -17$, järeldubki siit, et $a_{2+17i} \vdots 17$. Seose $a_{7+118i} \vdots 118$ tõestus on analoogiline.

Jääb üle näidata, et leidub niisugune indeks n, mis avaldub mingite mittenegatiivsete i ja j korral kujul $n = 2 + 17i = 7 + 118j$. Teisisõnu me peame mittenegatiivsetes täisarvudes lahendama võrrandi

$$i = \frac{5 + 118j}{17}.$$

Proovides järjest läbi väärtusi $j = 0, 1, 2, \dots$ leiame, et sobib $j = 5$, mis annab $i = 35$ ja $n = 597$.

Tõepoolest, $a_{597} = 211348148 = 2006 \cdot 105358$.

Harjutus 10.6 Ülesandes 10.17 pole $n = 597$ vähim võimalik lahend. Leia arvuti abil vähim positiivne n väärtus, mille korral $a_n \vdots 2006$.

10.18 Vastus: a) ei, b) 200.

a) Oletame, et $P(2011) = 2011$ on võimalik. Võtame teoreemis 10.6 $k = 2011$ ja $\ell = 201$. Siis $P(k) - P(\ell) = 2011 - 2010 = 1$, aga $k - \ell = 2011 - 201 = 1810$. Kuna $1 \not\vdots 1810$, ei saa võrdus $P(2011) = 2011$ kehtida.

b) Sama moodi nagu a)-osas võtame teoreemis 10.6 arvud $k = 2011$ ja $\ell = 201$. Siis peab kehtima seos $P(2011) - P(201) \vdots 2011 - 201$ ehk $P(2011) - 2010 \vdots 1810$. Vähim positiivne $P(2011)$ väärtus, mille puhul see seos kehtida saab, on 200.

Jääb üle konstrueerida täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille puhul kehtivad kõik vajalikud võrdused, st

$$\begin{aligned} P(201) &= 2010\,, \\ P(2010) &= 2010\,, \\ P(2011) &= 200\,. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et 201 ja 2010 on polünoomi $P(x) - 2010$ juurteks, seega peab see polünoom jaguma lineaarpolünoomidega $x - 201$ ja $x - 2010$. Järelikult peab polünoom $P(x) - 2010$ esituma kujul $(x - 201)(x - 2010)Q(x)$ mingi täisarvuliste kordajatega polünoomi $Q(x)$ jaoks. Asendame $x = 2011$ ja saame

$$\begin{aligned} -1810 &= 200 - 2010 = P(2011) - 2010 = \\ &= (2011 - 201)(2011 - 2010) \cdot Q(2011) = 1810 \cdot Q(2011)\,. \end{aligned}$$

Niisiis võime $Q(x)$ kohale võtta suvalise täisarvuliste kordajatega polünoomi, mille jaoks $Q(2011) = -1$. Kõige lihtsam on valida konstantne polünoom $Q(x) \equiv -1$, mis annab $P(x) = -x^2 + 2211x - 402000$.

10.19 Vastus: a) jah; b) ei.

a) Sobivaid valikuid polünoomi P ja täisarvu c jaoks on palju. Näiteks võime võtta $P(x) = -x^2 + 1$ ja $c = 1$, siis $P(1) = -1^2 + 1 = 0$ ja $P(P(1)) = P(0) = -0^2 + 1 = 1$. Samuti sobivad kõik polünoomid kujul $P(x) = -x + b$ suvalise täisarvu b jaoks ja $c \neq \frac{b}{2}$.

b) Teoreemist 10.6 teame, et kõigi täisarvude k ja ℓ puhul kehtib $P(k) - P(\ell) \vdots k - \ell$. Siit järeldub, et kui $P(k) \neq P(\ell)$, siis $|P(k) - P(\ell)| \geqslant |k - \ell|$.

Eelduse põhjal $P(P(P(c))) = c$, aga $P(P(c)) \neq c$, seega $P(P(c)) \neq P(P(P(c)))$. Ülaltehtud järelduse põhjal saame $|P(P(c)) - P(P(P(c)))| \geqslant |P(c) - P(P(c))|$ ehk $|P(P(c)) - c| \geqslant |P(c) - P(P(c))|$.

Paneme tähele, et ka $P(c) \neq P(P(c))$, sest kui kehtiks $P(c) = P(P(c))$, peaks kehtima ka $P(P(c)) = P(P(P(c))) = c$, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult $|P(c) - P(P(c))| \geqslant |c - P(c)|$.

Kuna $P(P(P(c))) = c$, siis ka $P(P(P(P(c)))) = P(c)$, niisiis eelduse järgi saame $P(P(P(c))) \neq P(P(P(P(c))))$ ja järelikult kehtib ka

$$\begin{aligned} |c - P(c)| &= |P(P(P(c))) - P(P(P(P(c))))| \\ &\geqslant |P(P(c)) - P(P(P(c)))| = |P(P(c)) - c|\,. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame võratuste ahela

$$|P(P(c)) - c| \geqslant |P(c) - P(P(c))| \geqslant |c - P(c)| \geqslant |P(P(c)) - c|\,.$$

Järelikult kehtivad kõigis võrratustes tegelikult võrdused, st

$$|P(P(c)) - c| = |P(c) - P(P(c))| = |c - P(c)|\,.$$

See tähendab, et arvud c, $P(c)$ ja $P(P(c))$ asuvad arvteljel paarikaupa üksteisest sama kaugel. See on võimalik ainult siis, kui kõik need kolm arvu on võrdsed, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

10.5 Viète'i valemid

Selles jaotises uurime, kuidas on omavahel seotud polünoomi juured ja kordajad.

Otsime ruutpolünoome juurtega x_1 ja x_2. Me teame juba, et kõik niisugused polünoomid peavad jaguma lineaarpolünoomidega $x - x_1$ ja $x - x_2$. Järelikult peavad kõik ruutpolünoomid, mille juured on x_1 ja x_2, esituma kujul

$$a(x - x_1)(x - x_2)\,,$$

kus a on mingi nullist erinev reaalarv. Siin jaotises vaatleme peamiselt *taandatud* polünoome, mille pealiikme kordaja $a = 1$. Näeme, et juurtega x_1 ja x_2 taandatud ruutpolünoome on täpselt üks, nimelt $(x - x_1)(x - x_2)$. Korrutame selle avaldise lahti, et leida vastava polünoomi kordajad:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\,.$$

Siit saame tuletada Viète'i teoreemi[3] taandatud ruutpolünoomi jaoks.

Teoreem 10.7 Kui taandatud ruutpolünoomi x^2+px+q juured on x_1 ja x_2, siis kehtivad seosed

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2)\,, \\ q &= x_1x_2\,. \end{aligned}$$

Samasuguse tulemuse saame anda ka 3. astme hulkliikmete jaoks. Otsime taandatud kuuppolünoomi juurtega x_1, x_2 ja x_3. Sarnaselt eelmise aruteluga leiame, et ainus selline polünoom saab olla $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Teda lahti korrutades leiame:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3\,.$$

Järelikult kehtib Viète'i teoreem kuuppolünoomide jaoks järgmises sõnastuses.

Teoreem 10.8 Kui taandatud kuuppolünoomi $x^3 + px^2 + qx + r$ juured on x_1, x_2 ja x_3, siis kehtivad seosed

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2 + x_3)\,, \\ q &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\,, \\ r &= -x_1x_2x_3\,. \end{aligned}$$

Harjutus 10.7 Milline näeb Viète'i teoreem välja 4. astme polünoomide jaoks?

Nagu eespool juba öeldud, on Viète'i teoreemi valemid väga kasulikud ülesannetes, kus tuleb omavahel siduda polünoomi kordajad ja juured.

Ülesanne 10.20 (Piirkonnavoor 2019, 10. klass) Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Lahendus. Viète'i valemitest teame, et $x_1 + x_2 = p$ ja $x_1x_2 = q$. Järelikult saame avaldada

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ &= p(p^2 - 3q) = p^3 - 3pq\,. \end{aligned}$$

[3] François Viète [vi'et] oli 16. sajandi prantsuse matemaatik. Sageli kasutatakse ka tema latiniseeritud nimekuju Franciscus Vieta [viet'a].

Ülesanded

Ülesanne 10.21 (Piirkonnavoor 2020, 10. klass) Leia kõik reaalarvude paarid (p, q), mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Ülesanne 10.22 (Piirkonnavoor 1995, 10. klass) Olgu p, q täisarvud ning x_1, x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid. Kas on võimalik, et $|x_1 - x_2| = \sqrt{1995}$?

Ülesanne 10.23 (Piirkonnavoor 2012, 9. klass) Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

Ülesanne 10.24 (Piirkonnavoor 2007, 10. klass) Leia kõik sellised reaalarvude nelikud (a, b, c, d), kus c ja d on ruutvõrrandi $x^2 + ax + b = 0$ lahendid ning a ja b on ruutvõrrandi $x^2 + cx + d = 0$ lahendid.

Ülesanne 10.25 (Sügisene lahtine võistlus 2009, noorem rühm) Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ kordajad a, b, c on täisarvud. Olgu x_1, x_2 selle ruutvõrrandi lahendid. Koosta täisarvuliste kordajatega ruutvõrrand, mille lahendid on arvud x_1^3 ja x_2^3.

Ülesanne 10.26 (Lõppvoor 2000, 11. klass) Leia kõik a väärtused, mille korral võrrandil $x^3 - x + a = 0$ on kolm erinevat täisarvulist lahendit.

Ülesanne 10.27 (Lõppvoor 2007, 11. klass) Leia kõik sellised reaalarvud a, mille korral ruutvõrrandi $x^2 - ax + a = 0$ lahendid on täisarvud.

Lahendused

10.21 Viète'i teoreemi põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p = -\left(\frac{p}{3} + q\right) \\ q = \frac{p}{3} \cdot q \end{cases}.$$

Süsteemi teine võrrand saab kehtida siis, kui $q = 0$ või $p = 3$. Kui $q = 0$, siis esimese võrrandi põhjal saame, et ka $p = 0$, aga see tähendaks, et ruutvõrrandi lahendid on võrdsed. Kui $p = 3$, jääb süsteemi esimene võrrand kujule

$$3 = -(1 + q),$$

kust saame $q = -4$. Võrrandi lahendid 1 ja -4 on tõepoolest erinevad, seega ainuke ülesande vastuseks sobiv arvupaar on $(3, -4)$.

10.22 Vastus: ei.

Viète'i teoreemi põhjal teame, et $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 x_2 = q$. Seega peaks kehtima võrdused

$$\begin{aligned} 1995 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \\ = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = p^2 - 4q, \end{aligned}$$

millest järeldub $p^2 = 1995 + 4q$. See pole võimalik, sest $1995 + 4q$ annab 4-ga jagades jäägi 3, aga täisarvude ruudud saavad 4-ga jagades anda ainult jäägi 0 või 1.

10.23 Olgu võrrandi lahendid x_1 ja x_2. Viète'i teoreemi põhjal teame, et $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 x_2 = 12$. Arvude x_1 ja x_2 vahe on 1 parajasti siis, kui nende vahe ruut on 1. Avaldame

$$\begin{aligned}1 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \\ = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 48\,.\end{aligned}$$

Järelikult kehtib võrdus $1 = p^2 - 48$ ehk $p^2 = 49$, mistõttu kordaja p kohale sobivad parajasti ainult arvud 7 ja -7.

10.24 Vastus: sobivad kõik nelikud kujul $(a, 0, -a, 0)$, kus a on suvaline reaalarv, ja nelik $(1, -2, 1, -1)$.

Viète'i valemite põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a = -(c + d) \\ b = c \cdot d \\ c = -(a + b) \\ d = a \cdot b \end{cases}.$$

Asendus süsteemi esimesest ja teisest võrrandist kolmandasse annab

$$\begin{aligned} c &= -(-(c + d) + cd)\,, \\ c &= c + d - cd\,, \\ 0 &= d(1 - c)\,. \end{aligned}$$

Niisiis tuleb läbi vaadata kaks juhtu.

Kui $d = 0$, siis süsteemi teise võrrandi põhjal ka $b = 0$ ning kolmanda võrrandi põhjal $c = -a$. Kuna võrrandi $x^2 + ax = 0$ lahendid on 0 ja $-a$ ning võrrandi $x^2 - ax = 0$ lahendid on 0 ja a, sobivad kõik nelikud kujul $(a, 0, -a, 0)$.

Kui $d \neq 0$, siis ülaltuletatud võrduse põhjal $c = 1$. Süsteemi teisest võrrandist saame siis $b = d$. Kuna järelikult ka $b \neq 0$, saame süsteemi neljandast võrrandist $a = 1$. Süsteemi esimene võrrand annab nüüd $1 = -(1 + d)$, millest saame $d = -2$ ja järelikult ka $b = -2$. Kuna võrrandi $x^2 + x - 2 = 0$ lahendid on tõepoolest 1 ja -2, sobib vastuseks ka nelik $(1, -2, 1, -1)$.

10.25 Kuna ruutvõrrandi puhul $a \neq 0$, võime võrrandi taandada ja kasutada taandadud võrrandi $x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$ jaoks Viète'i teoreemi, millest saame

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Avaldame $x_1^3 + x_2^3$ ja $x_1^3 x_2^3$. Kõigepealt saame

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ = -\frac{b}{a}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}\,. \end{aligned}$$

Kuna teisest küljest

$$x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = \frac{c^3}{a^3},$$

on x_1^3 ja x_2^3 ruutvõrrandi $x^2 + \left(\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^3}\right) + \frac{c^3}{a^3} = 0$ lahenditeks. Korrutades saadud võrrandi mõlemaid pooli a^3-ga, jäävad lahendid samaks ja tulemuseks on täisarvuliste kordajatega võrrand $a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$, mis sobibki otsitavaks.

10.26 Vastus: $a = 0$ on ainus võimalus.

Olgu ülesande võrrandi lahendid k, l ja m. Viète'i valemite põhjal teoreemist 10.8 teame siis, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} 0 &= k + l + m, \\ -1 &= kl + lm + mk, \\ a &= -klm. \end{aligned}$$

Tõstame esimese võrduse ruutu ning kasutame teisendamisel teist võrdust:

$$0 = (k + l + m)^2 = k^2 + l^2 + m^2 + 2(kl + lm + mk) = k^2 + l^2 + m^2 - 2,$$

millest omakorda järeldub võrdus

$$k^2 + l^2 + m^2 = 2.$$

Kuna k, l ja m peavad olema erinevad täisarvud, saavad nad olla ainult $-1, 0$ ja 1 mingis järjekorras. Igal juhul $a = -klm = 0$.

10.27 Vastus: 0 ja 4.

Olgu ülesande ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2 Viète'i valemitest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = a \end{cases}.$$

Niisiis tuleb leida võrrandi

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2$$

täisarvulised lahendid. Paneme tähele, et $x_1 = 1$ ei sobi, sest võrrandil $x_2 = 1 + x_2$ pole lahendeid. Eeldusel $x_1 \neq 1$ saame teisendada

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_1 + x_2, \\ x_2(x_1 - 1) &= x_1, \\ x_2 &= \frac{x_1}{x_1 - 1}. \end{aligned}$$

Avaldis $\frac{x_1}{x_1 - 1}$ on täisarvulise x_1 korral täisarv ainult siis, kui $x_1 - 1 = \pm 1$, st parajasti juhtudel $x_1 = 0$ ja $x_1 = 2$. Siis vastavalt ka $x_2 = 0$ ja $x_2 = 2$ ning $a = 0$ ja $a = 4$.