1. Naturaalarvud ja matemaatiline induktsioon

Kas hea lugeja on kunagi mõtisklenud selle üle, kuidas on õigupoolest defineeritud naturaalarvud? Jah, muidugi tekivad nad loomulikul moel *loendamise* tulemusena, st lõplike hulkade elementide arvudena. Aga kas me saaksime anda ka matemaatiliselt rangema definitsiooni?

Osutub, et kõige olulisemat rolli naturaalarvude konstrueerimisel mängib nende *järgnevus* üksteisele. Võtame kasutusele konstandisümboli e, mida mõistame kui esimest naturaalarvu, ja funktsioonisümboli J, mida mõistame kui “järgmise võtmise” operatsiooni. Siis võime naturaalarvud defineerida järgmiselt.

Definitsioon 1.1 (Naturaalarvud)

- e on naturaalarv.
- Kui k on naturaalarv, siis $J(k)$ on ka naturaalarv.
- Teisi naturaalarve peale eelmises kahes punktis saadavate ei ole.

Seega võiksime naturaalarvude jada kirjutada kui

$$e, J(e), J(J(e)), J(J(J(e))), J(J(J(J(e)))), \dots .$$

Niisugune kirjapilt läheb kiiresti väga kohmakaks, sellepärast on inimesed mõelnud välja lühemaid märgisüsteeme. Nii tähistame me kokkuleppeliselt tühja hulga elementide arvu sümboliga 0, minimaalse mittetühja hulga elementide arvu sümboliga 1, edasi tulevad $2, 3, 4$ jne.

Oluline on aru saada, et need on ainult sümbolid ja nende valik pole kuidagi seotud naturaalarvude olemusega. Nii näiteks kasutatakse hiina kirjas samade numbrite jaoks hoopis sümboleid 零, 一, 二, 三, 四 jne.

Konkreetsetest tähistest palju olulisem on see, et definitsioon 1.1 annab meile üldise meetodi naturaalarvude kohta käivate väidete tõestamiseks. Seda meetodit nimetatakse *matemaatiliseks induktsiooniks* või sageli ka lihtsalt *induktsiooniks*.

Induktiivne tõestus koosneb kahest osast.

1. **[Induktsiooni baas]** Tõestame, et väide kehtib esimese naturaalarvu jaoks.
2. **[Induktsiooni samm]** Tõestame väite kehtivuse naturaalarvu $k + 1$ korral eel-

dades, et ta kehtib naturaalarvu k korral.

Definitsiooni 1.1 kolmanda punkti põhjal oleme nii kogu naturaalarvude hulga läbi vaadanud, st väide on tõestatud kõigi naturaalarvude jaoks.

See, kas esimeseks naturaalarvuks sobib 0 või 1, sõltub ülesandest.[1] Võib ka juhtuda, et väide hakkab kehtima alles alates mõnest suuremast naturaalarvust m; sel juhul võimegi induktsiooni baasiks võtta arvu m. Võistlusülesannetes määratakse baasjuht enamasti ilmutatult ära.

Ülesanne 1.1 Tõesta, et esimese $n \geqslant 1$ paaritu naturaalarvu summa on n^2.

Lahendus. Baasjuhul $n = 1$ on esimeseks paarituks arvuks 1 ning uuritav summa moodustubki ainult temast endast. Kuna $1^2 = 1$, oleme induktsiooni baasi edukalt tõestanud.

Induktsiooni sammu jaoks eeldame, et mingi naturaalarvu k korral kehtib võrdus

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

ning uurime $k + 1$ esimese paaritu naturaalarvu summat

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1)\,.$$

Paneme tähele, et viimases avaldises esineb osasummana ka $1+3+5+\ldots+(2k-1)$, millele saame rakendada induktsiooni sammu eeldust:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2\,.$$

Olemegi tõestanud induktsiooni sammu väite kehtivuse $k + 1$ korral ja sellega lahendanud kogu ülesande.

Tegelikult võiksime ülesandes 1.1 baasjuhuks valida ka $n = 0$, kuid siis peaksime eraldi kokku leppima, et null liikme summa on 0.

Järgmise ülesande väidet läheb matemaatikavõistlustel vahel vaja osana pikemast lahendusest.

Ülesanne 1.2 Tõesta iga naturaalarvu $n \geqslant 1$ korral võrdus

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Lahendus. Kasutame matemaatilist induktsiooni. Juhul $n = 1$ näeme, et

$$\frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 = 1^2\,,$$

mis tõestab induktsiooni baasi.

Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et mingi naturaalarvu k korral kehtib võrdus

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\,.$$

[1] Tegelikult pole matemaatikud suutnud aastatuhandete jooksul omavahel kokku leppida, kas naturaalarvud peaksid algama 0-st või 1-st, ja erinevates raamatutes võibki selles osas leida erinevaid käsitlusi. Matemaatikavõistluste ülesannete sõnastamisel püütakse seetõttu mõistet 'naturaalarv' üldse vältida ning kasutatakse selle asemel üheselt mõistetavat väljendit 'positiivne täisarv' või 'mittenegatiivne täisarv'.

Näeme, et summa $1^2+2^2+\ldots+k^2$ esineb osasummana ülesande avaldises $n=k+1$ jaoks, st summas $1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$. Seda tähelepanekut saame kasutada ära induktsiooni sammu tegemisel:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)\cdot[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]\cdot[2(k+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

Oleme saanud ülesande avaldise $n=k+1$ jaoks, mis lõpetab induktsiooni sammu tõestuse.

Võistlusülesannetes pole tõestatavat avaldist sageli ilmutatult ette antud. Sel juhul kõigepealt ise hüpotees leida.

Ülesanne 1.3 Leia summa

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

arvutamise eeskiri suvalise naturaalarvu $n\geqslant 1$ jaoks.

Lahendus. Hüpoteesi leidmiseks arvutame mõned esimesed väärtused välja:

$$\begin{aligned}n=1: &\quad \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\\ n=2: &\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\\ n=3: &\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Äkki võiks ülesande summa väärtus üldjuhul olla $\frac{n}{n+1}$? Tõestame selle hüpoteesi matemaatilise induktsiooni abil.

Baasjuht $n=1$ on ülal juba läbi vaadatud. Sammu tegemiseks eeldame, et mingi naturaalarvu k korral kehtib võrdus

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

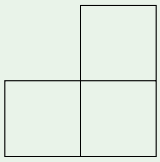
ning paneme tähele, et see summa esineb osasummana ka ülesande avaldises $n=k+1$ jaoks. Nüüd võime teisendada

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Oleme saanud tõestatava avaldise $n = k + 1$ jaoks, mis põhjendab induktsiooni sammu ja lõpetab ülesande lahenduse.

Näeme, et induktsioon osutub eriti kasulikuks siis, kui ülesande konstruktsioon juhul $n = k$ ilmub loomulikul moel alamkonstruktsioonina juhust $n = k + 1$. Selline olukord võib esineda ka mujal kui ainult arvjadade korral.

Ülesanne 1.4 Ruut mõõtmetega $2^n \times 2^n$ ($n \geqslant 0$) on jagatud ühikruutudeks. Tõesta, et kui ükskõik milline neist ühikruutudest ruudustikust välja lõigata, saab allesjäänud kujundi jagada joonisel toodud kujuga tükkideks.



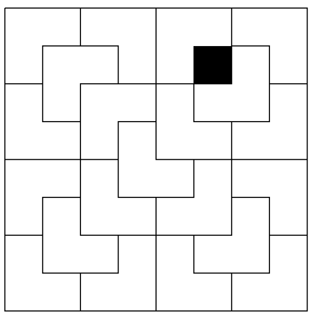
Lahendus. Kasutame matemaatilist induktsiooni muutuja n järgi. Baasjuhul $n = 0$ on meil 1×1 ruut, mille äralõikamisel ei jää järele mitte midagi. Kas seda saab jagada ülesandes nõutud tükkideks? Jah, saab küll ja vaja läheb täpselt 0 sellist tükki. Baasjuht on ilma igasuguse vaevata tõestatud!

Induktsiooni sammul peame näitama, et $n = k + 1$ jaoks saab nõutud viisil jagada $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ruudustiku, kust on välja lõigatud suvaline ruut. Seejuures tohime tõestuses kasutada eeldust $n = k$ jaoks ehk $2^k \times 2^k$ ruudustiku jaotust. Kuidas taandada $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ruudustiku jaotamise ülesanne $2^k \times 2^k$ ruudustiku jaotamisele?

Paneme tähele, et $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ruudustiku saab mööda vertikaalset ja horitontaalset keskjoont jagada neljaks $2^k \times 2^k$ ruuduks. Seejuures välja lõigatud väike ruut satub täpselt ühte $2^k \times 2^k$ veerandisse. Selle veerandi saab induktsiooni eelduse põhjal nõutud viisil jagada.

Ülejäänud kolmest veerandist lõikame välja nurgaruudu, mis jääb algse $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ruudustiku keskele. Ülejäänud osad neist veeranditest saab induktsiooni eelduse põhjal tükkideks jagada (sest ära võis lõigata suvalise, sh nurgaruudu). Üle jääb ainult kolm väljalõigatud nurgaruutu, mis samuti moodustavad ülesandes antud kujundi. (Muuhulgas töötab kogu arutelu ka üleminekul ruudustikult mõõtmetega $2^0 \times 2^0$ ruudustikule mõõtmetega $2^1 \times 2^1$!) Sellega on nii induktsiooni samm kui ülesande väide tõestatud.

Joonis illustreerib lahendust 8×8 ruudustiku korral.



Induktsiooni samm ei pea alati taandama juhu $n = k + 1$ tõestamist juhule $n = k$. Sageli on lihtsam kasutada mõnda teist väärtust n vahemikust $0, \ldots, k$ (või üldisemalt

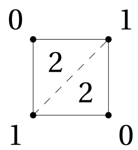
$k_0, \ldots, k$, kus k_0 on baasjuht). Sellist induktsiooni varianti nimetatakse *tugevaks matemaatiliseks induktsiooniks*. Põhjalikumat materjali matemaatilise induktsiooni ja selle kasutamise kohta leiab huvitatud lugeja näiteks Reimo Palmi koostatud õpikust [12].

Ülesanne 1.5 (Sügisene lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Korrapärase n-nurga igasse tippu on kirjutatud kas arv 0 või arv 1. Juku jaotab n-nurga lõikumatute diagonaalidega kolmnurkadeks ning kirjutab iga kolmnurga sisse tema tippudes olevate arvude summa. Tõesta, et Juku saab diagonaalid valida nii, et kolmnurkadesse kirjutatud arvudest suurim ja vähim ei erine rohkem kui 1 võrra.

Lahendus. Kui n-nurga tippudes on ainult numbrid 0 või ainult numbrid 1, siis kirjutab Juku suvalise jaotuse korral igasse kolmnurka vastavalt kas 3 või 0 ning ülesande väide kehtib.

Tõestame nüüd (tugeva) induktsiooniga, et kui kumera[2] n-nurga tippudesse on kirjutatud nii 0-e kui 1-sid (mõlemaid vähemalt üks), siis saab selle n-nurga kolmnurkadeks jaotada nii, et kolmnurkade tippude summad on kõik kas 1 või 2.

Baasjuhul $n = 3$ on väide ilmne. Induktsiooni sammu tegemiseks jagame n-nurga (kus $n \geqslant 4$) kaheks väiksema tippude arvuga hulknurgaks mööda diagonaali, mille ühte otspunkti on kirjutatud 0 ja teise 1. Juhul $n = 4$ võib niisugust diagonaali mitte leiduda, kui nelinurga ühe diagonaali tippudes on 0-d ja teise diagonaali tippudes 1-d (sest mõlemaid tähiseid peab leiduma). Jooniselt on näha, et tõestatav väide kehtib ka sel juhul:



Kui $n \geqslant 5$, valime n-nurga külje AB, mille ühes otsas on 0 ja teises 1 (selline külg peab leiduma, sest tiputähiste hulgas on nii 0-e kui 1-sid). Kuna $n \geqslant 5$, leidub tipp C, mis ei ole nende kummagi naaber ja ükskõik, kas tema juurde on kirjutatud 0 või 1, saame valida kas diagonaali AC või BC, mille otspunktide juures on erinevad tähised.

Nüüd saame vaadeldava n-nurga mööda leitud diagonaali jagada kaheks kumeraks hulknurgaks, millel kummalgi on vähem tippe kui n ning mõlemal leidub tippe nii nii 0- kui 1-tähisega. Induktsiooni eelduse põhjal saab mõlemad nõutud viisil kolmnurkadeks jagada ja need kaks jaotust koos annavad vaadeldava n-nurga jaotuse.

Ülesanded

Ülesanne 1.6 (2016. piirkonnavoor, 9. klass) Kaks tantsijat alustab rivitantsu. Saatelaulu teise salmi algul astub kolmas tantsija nende vahele, nii et moodustub kolmene rivi.

[2] *Kumeraks* nimetame kujundit, mis koos oma mistahes kahe punktiga A ja B sisaldab ka neid punkte ühendava lõigu AB. Hulknurga korral on kumerus samaväärne tingimusega, et ükski tema sisenurk ei ületa 180°.

Samamoodi astub iga järgmise salmi algul iga kahe rivis järjestikku asuva tantsija vahele üks uus tantsija. Mitu tantsijat on rivis kümnenda salmi ajal?

Ülesanne 1.7 (Piirkonnavoor 1993, 11. klass) Leia a_{1993}, kui $a_1 = 0$ ja

$$a_k = \frac{2}{3 - a_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Ülesanne 1.8 (Piirkonnavoor 2000, 12. klass) Näita, et mistahes naturaalarvu $n \geqslant 6$ korral on võrdkülgset kolmnurka võimalik jaotada n võrdkülgseks kolmnurgaks (need ei tarvitse olla võrdse suurusega).

Ülesanne 1.9 (Lõppvoor 1995, 10. klass) Tõesta, et mistahes kolmnurka on suvalise naturaalarvu $n \geqslant 4$ korral võimalik jagada n võrdhaarseks kolmnurgaks.

Ülesanne 1.10 (Lõppvoor 2000, 11. klass) Defineerime jadad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ja $b_1, b_2, b_3, \ldots$ järgmiste seostega: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ ning $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ ja $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Leia arvu $a_{2000} + b_{2000}$ kõik erinevad algtegurid.

Ülesanne 1.11 (Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Leia vähim võimalik 2021 liikme summa täisarvude jadas $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kus $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$ ja iga $i, j \geqslant 2$ korral $a_{i+j} > a_i + a_j$.

Ülesanne 1.12 (Piirkonnavoor 2015, 12. klass) Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

Ülesanne 1.13 (Sügisene lahtine võistlus 2005, noorem rühm) Talumees Ants pani aasta lõpus tähele, et aastaga sündis tema karjas vasikaid täpselt niisama palju kui kahel eelneval aastal kokku, põrsaid aga koguni ühe võrra rohkem kui kahel eelneval aastal kokku. Ants lubas, et sama seaduspärasuse jätkudes sünnib tema karjas mingil aastal vähemalt kaks korda rohkem põrsaid kui vasikaid, kuigi seni on sellest eesmärgist alati natuke puudu jäänud. Kas Antsu lubadus võib tõeks saada?

Ülesanne 1.14 (Lõppvoor 2001, 10. klass) Aafrikas elava Abababi hõimu naaberhõim kasutab tähestikust samuti ainult tähti A ja B. Sõnade moodustamisel kehtivad aga nende keeles järgmised ranged reeglid:

(1) A on sõna;

(2) kui w on sõna, siis ka ww ja $w\overline{w}$ on sõnad, kus $\overline{w}$ saadakse sõnast w kõigi tähtede A asendamisel tähtedega B ja kõigi tähtede B asendamisel tähtedega A (xy tähistab x ja y järjest kirjutamist);

(3) kõik sõnad on konstrueeritavad reeglite (1) ja (2) põhjal.

Tõesta, et mistahes kaks erinevat ühepikkust sõna selles keeles erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

Ülesanne 1.15 (Lõppvoor 2002, 10. klass) Õpetaja kirjutab tahvli kumbagi serva arvu 1. Esimene õpilane kirjutab nende vahele lisaks arvu 2; iga järgmine õpilane kirjutab iga kahe tahvlil kõrvuti oleva arvu vahele lisaks nende summa (pärast teise õpilase tahvli juures käimist on tahvlil arvud $1,3,2,3,1$, pärast kolmandat õpilast arvud $1,4,3,5,2,5,3,4,1$, jne.) Leia kõigi tahvlil olevate arvude summa pärast seda, kui n õpilast on käinud sinna arve juurde kirjutamas.

Ülesanne 1.16 (Talvine lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Kehalise kasvatuse õpetaja rivistas õpilased nii, et rivi igast kolmest järjestikusest õpilasest esimene on pikkuselt teise ja kolmanda vahel. Pärast käsku igal teisel õpilasel ette astuda tekib kaks rivi. Tõesta, et mõlemad rivid on pikkuse järgi järjestatud.

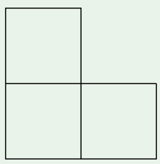
Ülesanne 1.17 (Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Leidur esitles kuningale oma uut põnevat lauamängu 9×10 ruudustikul. Kuningas lubas talle tasuks esimese ruudu eest ühe riisitera, teise ruudu eest samuti ühe riisitera ning iga järgneva ruudu eest samapalju riisiteri kui kahe eelmise ruudu eest kokku. Tõesta, et viimase ruudu eest teenis leidur vastavalt kuninga lubadusele rohkem kui 2015^4 riisitera.

Ülesanne 1.18 (Sügisene lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Antud on $n \geqslant 2$ positiivset täisarvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mille summa on paarisarv ja mis iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral rahuldavad tingimust $a_i \leqslant i$. Tõesta, et avaldises $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ saab märgid valida nii, et selle avaldise väärtus on 0.

Ülesanne 1.19 (Piirkonnavoor 2001, 12. klass) Tähistagu a_n arvude $1, 2, 3, \ldots, n$ ruutude vahelduvate märkidega summat: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 - 2^2$, $a_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2$, $a_4 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2$, jne. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral kehtib võrdus

$$|a_n| = 1 + 2 + 3 + \ldots + n\,.$$

Ülesanne 1.20 (Lõppvoor 2010, 11. klass) Tõesta, et suvalise naturaalarvu k korral on kolmest ühikruudust koosnevate nurgikutega võimalik täpselt katta nurgikutega sarnane, aga k korda suuremate küljepikkustega kujund.



Ülesanne 1.21 (Lõppvoor 2010, 12. klass) Jada (a_n) on defineeritud seostega $a_1 = 1$ ja $a_n = n \cdot (a_1 + \ldots + a_{n-1})$ iga $n > 1$ korral. Leida kõik positiivsed täisarvud n, mille korral a_n jagub arvuga $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Ülesanne 1.22 (Lõppvoor 2022, 12. klass) Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n, mille korral saab täisarvud $1, 2, 3, \ldots, 2n$ jaotada paaridesse nii, et paaride liikmete korrutiste summa jagub arvuga $2n$.

Ülesanne 1.23 (Lõppvoor 2002, 11.klass) Juku ehitas roboti, mis liigub mööda korrapärase kaheksanurga kujulist rada, läbides kaheksanurga ühe külje täpselt 1 minutiga.

Robot alustab liikumist kaheksanurga tipust A ning edaspidi võib ta mistahes tippu jõudes kas samas suunas liikumist jätkata või ümber pöörata ja jätkata liikumist vastassuunas. Kui mitmel erineval viisil võib robot liikuda, nii et ta n minuti pärast on tipu A vastastipus B?

Lahendused

1.6 Vastus: 513.

Kui mingi salmi ajal on rivis t tantsijat, siis järgmiseks salmiks lisandub neile veel $t-1$, seega on järgmise salmi ajal kokku $2t-1$ tantsijat. Olgu a_n tantsijate arv n. salmi ajal. Siis saame jada a_n esimesed liikmed välja arvutada:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\,, \\ a_2 &= 2\cdot 2-1 = 3\,, \\ a_3 &= 2\cdot 3-1 = 5\,, \\ a_4 &= 2\cdot 5-1 = 9\,, \\ a_5 &= 2\cdot 9-1 = 17\,, \\ a_6 &= 2\cdot 17-1 = 33\,, \\ a_7 &= 2\cdot 33-1 = 65\,, \\ a_8 &= 2\cdot 65-1 = 129\,, \\ a_9 &= 2\cdot 129-1 = 257\,, \\ a_{10} &= 2\cdot 257-1 = 513\,. \end{aligned}$$

Niisugune lahendus on korrektne ja annab õige vastuse, aga tal on ka paar kitsaskohta. Esiteks on pikad rehkendused alati veaohtlikud ja neid tasuks võimalusel vältida. Teiseks saab täieliku läbiarvutamisega leida ainult võrdlemisi väikese arvu väärtusi. Aga kui suur oleks näiteks a_{1000}?

Sellele küsimusele vastamiseks püüame olla kavalamad ja leida jada a_n üldliikme kuju. Pole raske ära tunda, et jada esimesed liikmed $2, 3, 5, 9, 17, 33\ldots$ on 1 võrra suuremad kui arvu 2 järjestikused astmed $1, 2, 4, 8, 16, 32\ldots$.

Niisiis võtame eesmärgiks tõestada, et $a_n = 2^{n-1}+1$. Induktiivse tõestuse jaoks on baasjuht $n=1$ lihtne, sest $a_1 = 2 = 2^{1-1}+1$. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et mingi $n = k$ korral kehtib $a_k = 2^{k-1}+1$ ja uurime liiget a_{k+1}. Ülal nägime, kuidas avaldada seda liiget a_k kaudu:

$$a_{k+1} = 2\cdot a_k - 1 = 2\cdot(2^{k-1}+1)-1 = 2^k+2-1 = 2^k+1\,.$$

Sellega on induktsiooni samm lõpetatud ja a_n avaldise üldkuju tõestatud. Muuhulgas võime nüüd arvutada, et $a_{10} = 2^9+1 = 513$.

1.7 Lahendajale ei antaks ülesandeks leida jada 1993. liiget, kui jadas ei esineks mingit seaduspära, mida lahenduses ära kasutada saaks. Leiame seaduspära otsides jada mõned esimesed liikmed.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0\,,\\
a_2 &= \frac{2}{3-a_1} = \frac{2}{3-0} = \frac{2}{3}\,,\\
a_3 &= \frac{2}{3-a_2} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{6}{7}\,,\\
a_4 &= \frac{2}{3-a_3} = \frac{2}{3-\frac{6}{7}} = \frac{14}{15}\,.
\end{aligned}$$

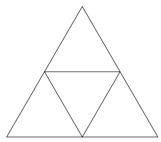
Näeme, et vähemalt $k = 1, 2, 3, 4$ korral kehtib võrdus $a_k = \dfrac{2^k-2}{2^k-1}$. Tõestame matemaatilise induktsiooni abil, et leitud seaduspära kehtib iga naturaalarvu $k \geqslant 1$ jaoks.

Induktsiooni baas $k = 1$ puhul ilmselt kehtib. Sammu jaoks eeldame, et $a_k = \dfrac{2^k-2}{2^k-1}$ ning leiame a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \frac{2}{3-a_k} = \frac{2}{3-\frac{2^k-2}{2^k-1}} = \frac{2}{\frac{3(2^k-1)-(2^k-2)}{2^k-1}} = \frac{2(2^k-1)}{2\cdot 2^k-3+2} = \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}\,,$$

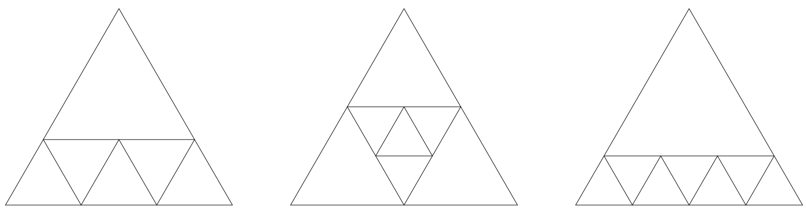
seega kehtib jada seaduspärasus ka $(k+1)$. liikme jaoks, mis lõpetab induktsiooni sammu. Muuhulgas saame, et selle jada 1993. liige on $\dfrac{2^{1993}-2}{2^{1993}-1}$.

1.8 Lihtne on näha, et iga võrdkülgse kolmnurga saab tema kesklõikude abil jagada neljaks võrdkülgseks kolmnurgaks:

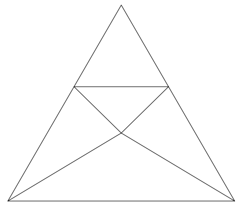


See tähendab, et kui meil on olemas kolmnurga jaotus n võrdkülgseks tükiks, saame ühte tükki neljaks jagades jaotuse $n - 1 + 4 = n + 3$ tükiks.

Niisiis saame induktsiooni sammu teha 3 kaupa. Ülesande lahendamiseks piisab näidata konstruktsioon kolme baasjuhu $n = 6$, $n = 7$ ja $n = 8$ jaoks. Sobivad konstruktsioonid on antud alloleval joonisel:



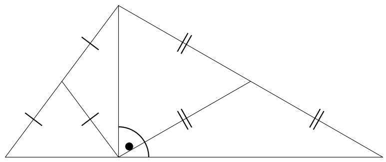
1.9 Kui antud kolmnurk on võrdkülgne, saame kasutada ülesande 1.8 lahendust, mis annab ühe võimaliku konstruktsiooni $n = 4$ ja $n \geqslant 6$ jaoks. Lisaks tuleb näidata, kuidas jagada võrdkülgne kolmnurk viieks võrdhaarseks tükiks. Sobiva konstruktsiooni annab alljärgnev joonis:



Mittevõrdkülgsete kolmnurkade korral kasutame (samuti) matemaatilist induktsiooni.

Baasjuhu $n = 4$ jaoks näitame, kuidas jagada mistahes kolmnurk neljaks võrdhaarseks kolmnurgaks. Selleks paneme kõigepealt tähele, et igas kolmnurgas leidub tipp, millest tõmmatud kõrguse aluspunkt asub selle tipu vastaskülje sisepiirkonnas. Tõepoolest – teravnurkse kolmnurga puhul rahuldab seda tingimust iga tipp, täis- või nürinurkse kolmnurga puhul saame aga valida täis- või nürinurgale vastava tipu. Niisiis saab iga kolmnurga jagada kaheks täisnurkseks kolmnurgaks.

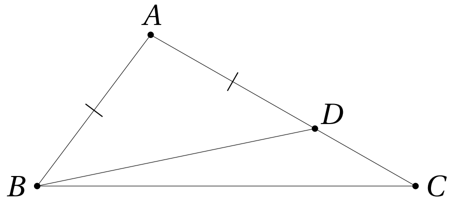
Teiseks paneme tähele, et iga täisnurkse kolmnurga saab jagada kaheks võrdhaarseks. Teame, et täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub tema hüpotenuusi keskpunktis (vt järeldus 26.2). Niisiis jagab täisnurkse kolmnurga täisnurgast hüpotenuusi keskpunkti tõmmatud lõik selle kolmnurga kaheks võrdhaarseks. Kokkuvõttes oleme näidanud, kuidas jagada mistahes kolmnurk neljaks võrdhaarseks kolmnurgaks.



Induktsiooni sammu jaoks eeldame, et me oskame iga mõttevõrdkülgse kolmnurga jagada $n = k$ võrdhaarseks tükiks. Vaatleme suvalist mittevõrdhaarset kolmnurka ABC ning näitame, kuidas jagada teda $n = k + 1$ tükiks.

Näitame, et kolmnurga ABC saab jagada kaheks tükiks, millest üks on võrdhaarne ja teine mittevõrdkülgne. Valime kolmnurga tipu (olgu ta üldisust kitsendamata A), mis on ühiseks otspunktiks erineva pikkusega servadele AB ja AC; olgu üldisust kitsendamata $|AB| < |AC|$. Valime küljel AC punkti D nii, et $|AB| = |AD|$, siis on kolmnurk ABD võrdhaarne.

Paneme tähele, et $\angle BDA < 90^\circ$, järelikult $\angle CDB > 90^\circ$, mistõttu kolmnurk BCD ei saa olla võrdkülgne. Niisiis saame sellele kolmnurgale rakendada induktsiooni eeldust ja jagada ta k võrdhaarseks tükiks. Kokkuvõttes oleme näidanud, kuidas jagada kolmnurk ABC $k + 1$ võrdhaarseks tükiks.



1.10 Leiame nende jadade mõned esimesed liikmed:

$$a_2 = \frac{3^3 + 1^2}{2} = 5, \quad b_2 = 3 \cdot 1 = 3, \quad a_3 = \frac{5^2 + 3^2}{2} = 17, \quad b_3 = 5 \cdot 3 = 15\,.$$

Näeme, et $a_1+b_1 = 4 = 2^2$, $a_2+b_2 = 8 = 2^3$, $a_3+b_3 = 32 = 2^5$. Tekib hüpotees, et a_n+b_n on iga n korral 2-e aste. Induktsiooni baas on juba kontrollitud. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et $n = k$ korral $a_k + b_k = 2^a$ mingi positiivse täisarvu a jaoks, ja leiame $a_{k+1} + b_{k+1}$:

$$a_{k+1} + b_{k+1} = \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} + a_k b_k = \frac{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2}{2} = \frac{(a_k + b_k)^2}{2} = 2^{2a-1},$$

mis on samuti 2 aste. Seega on ka $a_{2000} + b_{2000}$ ainus algtegur 2.

1.11 Selles ülesandes viib sihile sirgjooneline ahne algoritm.[3] Jätkame jada nii, et valime iga elemendi jaoks vähima võimaliku väärtuse. Vastavalt ülesande tingimustele saame $a_4 > a_2 + a_2 = 1 + 1 = 2$, seega võtame $a_4 = 3$. Sama moodi $a_5 > a_2 + a_3 = 1 + 1 = 2$, seega ka $a_5 = 3$. Edasi saame

$$a_6 > \max(a_2 + a_4, a_3 + a_3) = \max(4, 2) = 4 \quad\Rightarrow\quad a_6 = 5,$$
$$a_7 > \max(a_2 + a_5, a_3 + a_4) = \max(4, 4) = 4 \quad\Rightarrow\quad a_7 = 5.$$

Tekib hüpotees, et vähimate võimalike väärtustega (ja järelikult ka vähimate võimalike osasummadega) jada võiks olla $0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots$. Tähistame seda jada A_i, st

$$A_1 = 0,$$
$$A_i = \begin{cases} i-1, & \text{kui } i \geqslant 2 \text{ ja } i \text{ on paaris,} \\ i-2, & \text{kui } i \geqslant 2 \text{ ja } i \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Kõigepealt näitame, et iga ülesande tingimusi rahuldava jada a_i ja iga indeksi $i \geqslant 2$ korral kehtib võrratus $a_i \geqslant A_i$. Kasutame matemaatilist induktsiooni.

Baasjuhtumid $i = 1$, $i = 2$ ja $i = 3$ on lihtsad, sest $a_1 = A_1 = 0$, $a_2 = A_2 = 1$ ja $a_3 = A_3 = 1$. Olgu nüüd $i \geqslant 4$ ja kehtigu võrratus $a_k \geqslant A_k$ iga $2 \leqslant k < i$ jaoks. Ülesande tingimuste ja induktsiooni eelduse põhjal saame

$$a_i > a_{i-2} + a_2 \geqslant A_{i-2} + 1 = A_i - 2 + 1 = A_i - 1,$$

sest on lihtne näha, et $A_{i-2} = A_i - 2$ iga indeksi $i \geqslant 4$ puhul. Kuna a_i ja A_i on täisarvud, peab tegelikult kehtima ka võrratus $a_i \geqslant A_i$, mis lõpetabki induktsiooni sammu tõestuse.

Näitame nüüd, et jada A_i rahuldab ülesande tingimusi. Võrdused $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ ja $A_3 = 1$ kehtivad jada konstruktsiooni tõttu. Lisaks tuleb iga $i, j \geqslant 2$ jaoks kontrollida võrratuse $A_{i+j} > A_i + A_j$ kehtivust.

Kui i ja j on mõlemad paaris, saame

$$A_{i+j} = i + j - 1 > i - 1 + j - 1 = A_i + A_j.$$

Kui i on paaris ja j paaritu, saame

$$A_{i+j} = i + j - 2 > i - 1 + j - 2 = A_i + A_j;$$

[3] *Ahne* on täiesti ametlik nimi niisugusele optimeerimisalgoritmide klassile, kus igal sammul tehakse lokaalselt parim otsus. Selline lähenemine ei kindlusta mitte iga ülesande korral globaalselt optimaalset lahendit, aga vahel läheb selles osas õnneks.

samasugune arutelu kehtib ka siis, kui i on paaritu ja j paaris. Kui nii i kui ka j on paaritud, saame

$$A_{i+j} = i + j - 1 > i - 2 + j - 2 = A_i + A_j\,.$$

Järelikult kehtib vajalik võrratus kõigi indeksite väärtuste korral ja jada A_i rahuldab ülesande tingimusi.

Jääb üle leida selle jada esimese 2021 liikme summa. Otsitavaks summaks saame

$$0 + 2 \cdot (1 + 3 + 5 + \ldots + 2019) = 2 \cdot \frac{2020 \cdot 1010}{2} = 2040200\,.$$

1.12 Kasutame matemaatilist induktsiooni. Baasjuhul $n = 1$ saame

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2+1}} = \frac{1}{2}\,,$$

seega vajalik võrratus kehtib.

Sammu tegemiseks eeldame võrratuse kehtivust $n = k$ korral ja uurime ülesande avaldist juhul $n = k + 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}\,.$$

Induktsiooni sammu lõpetamiseks piisab, kui suudame tõestada võrratuse

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2(k+1)+1}}\,. \tag{1.1}$$

Teisendame seda võrratust:

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+3}}\,,$$
$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+3}}\,,$$
$$\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} \leqslant 2k+2\,,$$
$$(2k+1)(2k+3) \leqslant (2k+2)^2\,,$$
$$4k^2 + 8k + 3 \leqslant 4k^2 + 8k + 4\,.$$

Viimane võrratus kehtib. Kõik läbiviidud teisendused säilitasid võrratuse samaväärsuse, sest tänu tingimusele $k \geqslant 1$ on kõik vaadeldud avaldistes esinenud väärtused positiivsed. Järelikult kehtib ka võrratus (1.1) ja induktsiooni samm on tõestatud.

1.13 Olgu v_n ja p_n vastavalt n. aastal Antsu karjas sündinud vasikate ja põrsaste arvud. Ülesande tingimustest teame siis, et

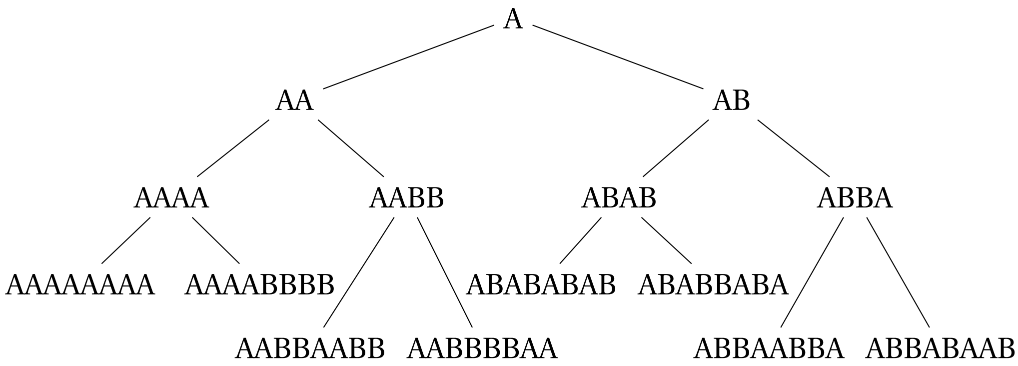
$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2}\,,$$
$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + 1\,.$$

Kui praegu on k. aasta, mil Ants loomi kasvatab, siis teame ka, et aastatel $1, \ldots, k$ on põrsaid sündinud vähem kui kaks korda rohkem kui vasikaid, st $n \leqslant k$ korral $p_n \leqslant 2v_n - 1$. Näitame, et siis ka aastal number $n = k+1$ kehtib sama võrratus:

$$p_{k+1} = p_k + p_{k-1} + 1 \leqslant 2v_k - 1 + 2v_{k-1} - 1 + 1 = 2(v_k + v_{k-1}) - 1 = 2v_{k+1} - 1\,.$$

Kokkuvõttes oleme induktsiooniga tõestanud, et kahjuks ei täitu Antsu unistus ka tulevikus.

1.14 Selleks, et saada aru, mis ülesandes toimub, on kasulik mõned lühemad sõnad ja nende moodustamise käik üles joonistada.



Näeme, et tekivad ainult sõnad pikkusega 2^n, kus $n = 0, 1, 2\ldots$. Kuna pikemad sõnad pannakse kokku kaks korda lühematest, on ülesandes olemas loomulik induktiivne struktuur. Niisiis proovime kasutada induktsiooni astendaja n järgi.

Väärtuse $n = 0$ jaoks on keeles ainult üks sõna pikkusega $2^0 = 1$, mida pole ühegi teise sõnaga võrrelda. Väärtuse $n = 1$ korral saame kaks sõna pikkusega $2^0 = 2$. Nendeks on AA ja AB, mis tõesti erinevad täpselt pooltel tähepositsioonidel. Sellega on induktsiooni baas tõestatud.

Sammu tegemiseks defineerime kõigepealt ühepikkuste sõnade u ja v jaoks nende *kauguse* $d(u, v)$ kui niisuguste tähepositsioonide arvu, millel need sõnad erinevad[4]; nii näiteks $d(\mathrm{AA}, \mathrm{AB}) = 1$ ja $d(\mathrm{AAAABBBB}, \mathrm{ABBABAAB}) = 4$. Ülesande väidet saab siis sõnastada kujul, et vaadeldava keele iga kahe erineva sõna u ja v korral, mille pikkus on 2^n, kehtib võrdus $d(u, v) = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Paneme tähele, et kõigi ühepikkuste sõnade u, v, w ja z korral kehtib võrdus $d(uv, wz) = d(u, w) + d(v, z)$.

Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et ülesande väide kehtib mingi $n = k$ korral, st kui vaadelda kahte erinevat uuritava keele sõna, mille mõlema pikkus on 2^k tähte, siis nendevaheline kaugus on 2^{k-1}.

Tõestame induktsiooni väite $n = k+1$ jaoks. Selleks vaatleme kahte erinevat sõna u ja v pikkusega 2^{k+1}. Vastavalt ülesande tingimustele saab u esitada kas kujul $u = ww$ või $u = w\overline{w}$ ja v esitada kas kujul $v = zz$ või $v = z\overline{z}$ mingite sõnade w ja z korral, kusjuures sõnade w ja z pikkus peab olema 2^k. Vaatame läbi võimalikud juhud.

[4] Seda suurust nimetatakse Ameerika matemaatiku Richard Wesley Hamming'i auks ka *Hammingi kauguseks*. Kontrolli iseseisvalt, et Hammingi kaugus rahuldab samasuguseid omadusi nagu punktidevaheline kaugus tasandil: iga sõna w korral $d(w, w) = 0$, iga kahe sama pika sõna u ja v korral $d(u, v) = d(v, u)$ ning iga kolme sama pika sõna u, v ja w korral $d(u, v) + d(v.w) \geqslant d(u, w)$.

- Kui $w = z$, siis kas $u = ww$ ja $v = w\overline{w}$ või vastupidi. Mõlemal juhul

$$d(u,v) = d(ww, w\overline{w}) = d(w,w) + d(w,\overline{w}) = 0 + 2^k = 2^k.$$

- Kui $w \neq z$, saame neli alamjuhtu. Kui $u = ww$ ja $v = zz$, siis induktsiooni eelduse põhjal

$$d(u,v) = d(ww, zz) = d(w,z) + d(w,z) = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

Kui $u = w\overline{w}$ ja $v = zz$, paneme tähele, et lisaks induktsiooni eeldusest tulenevale võrdusele $d(w,z) = 2^{k-1}$ peab kehtima ka $d(\overline{w},z) = 2^{k-1}$. Tõepoolest, kui sõnad w ja z erinevad 2^{k-1} positsioonil, langevad nad kokku $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ positsioonil. Need aga on täpselt need positsioonid, millel $\overline{w}$ ja z erinevad. Niisiis

$$d(u,v) = d(w\overline{w}, zz) = d(w,z) + d(\overline{w},z) = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

Juhud $u = w\overline{w}$ ja $v = z\overline{z}$ ning $u = ww$ ja $z\overline{z}$ on läbivaadatutega analoogilised.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et iga kahe erineva sõna u ja v (mille pikkus on $2^k + 1$) korral kehtib võrdus $d(u,v) = 2^k = 2^{(k+1)-1}$. Sellega on ka induktsiooni samm põhjendatud.

1.15 Vastus: $3^n + 1$.

Hüpoteesi kujundamiseks leiame esimeste õpilaste järel tahvlile jäänud arvude summad:

Arvud	Summa
$1, 1$	2
$1, 2, 1$	4
$1, 3, 2, 3, 1$	10
$1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$	28
$1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1$	82

Tekib hüpotees, et pärast n. õpilase tahvli juures käimist on sinna kirjutatud arvude summa $s_n = 3^n + 1$. Hüpoteesi tõestamiseks kasutame matemaatilist induktsiooni.

Kuna $s_0 = 3^0 + 1 = 2$, siis induktsiooni baas kehtib. Induktsiooni sammu tegemiseks uurime, kuidas sõltub summa s_n summast s_{n-1}.

Paneme tähele, et n. õpilane jätab tahvlile kõik enne teda seal olnud arvud kogusummaga s_{n-1}. Tema poolt juurde kirjutatavates summades osaleb iga tahvlil olnud arv kaks korda, välja arvatud otsmised 1-d, millest kumbki osaleb ühes uues summas. Seega on juurde kirjutatavate arvude summa $2s_{n-1} - 2$ ning pärast n. õpilast tahvlile jäävate arvude summa kokku $s_{n-1} + 2s_{n-1} - 2 = 3s_{n-1} - 2$.

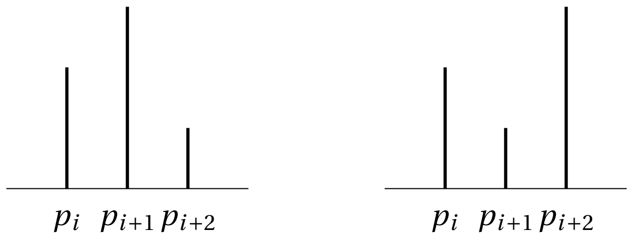
Kasutades induktsiooni eeldust $s_{n-1} = 3^{n-1} + 1$, saame nüüd

$$s_n = 3s_{n-1} - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3^n + 3 - 2 = 3^n + 1,$$

mis lõpetab induktsiooni sammu tõestuse.

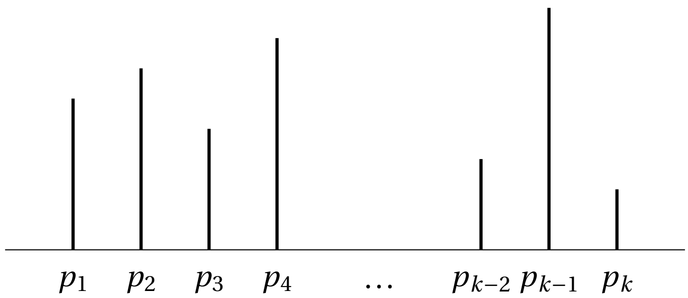
1.16 Olgu i. õpilase pikkus rivis p_i. Kuna iga õpilane peab olema pikkuselt kahe järgmise vahel, siis on selge, et ükski kaks järjest seisvat õpilast ei saa olla sama pikad.

Paneme tähele, et kui kahe kõrvutiseisva õpilase jaoks $p_i < p_{i+1}$, siis neist järgmise puhul peab kehtima $p_{i+2} < p_i$ (sest p_i peab jääma p_{i+1} ja p_{i+2} vahele). Muuhulgas tähendab see, et $p_{i+2} < p_{i+1}$. Sama moodi, kui $p_i > p_{i+1}$, peab järgmise õpilase jaoks kehtima $p_{i+2} > p_i$ ja järelikult ka $p_{i+2} > p_{i+1}$.



Vaatleme kõigepealt juhtu, kui $p_1 < p_2$. Näitame induktsiooniga, et siis jada $p_1, p_3, p_5, \ldots$ on rangelt kahanev ja jada $p_2, p_4, p_6, \ldots$ on rangelt kasvav. Eelpool nägime, et seosest $p_1 < p_2$ järeldub $p_1 > p_3$. Niisiis ka $p_2 > p_3$, millest omakorda järeldub, et $p_2 < p_4$. Seega on induktsiooni baas mõlema alamjada jaoks kontrollitud.

Induktsiooni sammu tegemiseks vaatleme k. õpilast (kus $k \geqslant 5$). Olgu k kõigepealt paaritu, siis induktsiooni eelduse järgi on alamjada $p_1, p_3, \ldots, p_{k-2}$ rangelt kahanev ja alamjada $p_2, p_4, \ldots, p_{k-1}$ rangelt kasvav. Järelikult $p_{k-2} < p_1 < p_2 < p_{k-1}$. Eelpool nägime, et võrratusest $p_{k-2} < p_{k-1}$ järeldub võrratus $p_k < p_{k-2}$, järelikult on ka jada $p_1, p_3, \ldots, p_{k-2}, p_k$ rangelt kahanev, mis lõpetab sellel juhul induktsiooni sammu tõestuse.



Tõestus paarisarvulise k korral on analoogiline.

Ülaltehtuga sarnane on tõestus ka juhul, kui $p_1 > p_2$ (ainult selle vahega, et jada $p_1, p_3, p_5, \ldots$ tuleb rangelt kasvav ja jada $p_2, p_4, p_6, \ldots$ rangelt kahanev).

1.17 Vahetu rehkendus näitab, et esimestele ruutude eest antakse leidurile vastavalt $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ riisitera. Seda jada tuntakse *Fibonacci jada* nime all ja tähistatakse tavaliselt F_i; niisiis $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ja $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ ($i \geqslant 3$).

Ülesandes peame tõestama, et $F_{90} > 2015^4$. Selleks tuleb kuidagi hinnata Fibonacci jada elementide kasvamise kiirust. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} 5 &> 4{,}5 = 1{,}5 \cdot 3\,, \\ 8 &> 7{,}5 = 1{,}5 \cdot 5 \quad \text{ja} \\ 13 &> 12 = 1{,}5 \cdot 8\,. \end{aligned}$$

Tekib hüpotees, et kui $i \geqslant 4$, siis $F_{i+1} > 1{,}5 \cdot F_i$.

Tõestame selle hüpoteesi induktsiooniga. Induktsiooni baasi $i = 4$ ja $i = 5$ jaoks oleme juba kontrollinud. Kui $i \geqslant 6$, saame induktsiooni eeldusest $F_i > 1{,}5 \cdot F_{i-1}$ ja $F_{i-1} > 1{,}5 \cdot F_{i-2}$. Niisiis

$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} > 1{,}5 \cdot F_{i-1} + 1{,}5 \cdot F_{i-2} = 1{,}5 \cdot (F_{i-1} + F_{i-2}) = 1{,}5 \cdot F_i\,,$$

mida oligi tarvis. Arvestades lisaks, et $F_3 = 2 > 1{,}5$ ja $F_4 = 3 = 1{,}5 \cdot F_3$, saame $F_i > 1{,}5^{i-2}$ iga $i \geqslant 3$ jaoks. Muuhulgas $F_{90} > 1{,}5^{88}$. Hindame seda suurust altpoolt edasi:

$$F_{90} > 1{,}5^{88} = (1{,}5^2)^{44} = (2{,}25)^{44} > 2^{44} = (2^{11})^4 = 2048^4 > 2015^4\,.$$

Rohkem infot Fibonacci jada kohta leiab huvitatud lugeja näiteks Reimo Palmi õpikust [12]. Muuhulgas on seal tõestatud, et

$$F_i \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i\,.$$

See tähendab, et Fibonacci jada käitub ligikaudu nagu geomeetriline jada kordajaga $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Kuna $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, saame siit ühe võimaliku heuristiku kordaja 1,5 proovimiseks ülaltoodud lahenduses.

Kuivõrd vaadeldavate avaldiste täpsed väärtused on $F_{90} = 2880067194370816120$ ja $2015^4 = 16485427050625$ (st erinevus on ligikaudu 175000-kordne), saab sellele ülesandele ilmselt leida väga palju erinevaid lahendusvõimalusi.

1.18 Kasutame matemaatilist induktsiooni. Kui $n = 2$, on ainus võimalus $a_1 = a_2 = 1$ ja sel juhul saame märgid nõutud viisil valida sest $a_1 - a_2 = 0$.

Kehtigu nüüd ülesande väide mingi $n = k$ korral ning vaatleme induktsiooni sammu tegemiseks suvalist $k+1$ elemendist koosnevat ülesande tingimustele vastavat järjendit $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Kuidas taandada vajaliku väite tõestus mingile k-elemendilisele järjendile?

Lihtsalt viimase elemendi järjendist ära jätmine ei tööta, sest jada $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ei pruugi vastata ülesande tingimustele. Tema elementide summa ei ole paarisarv, kui a_{k+1} on paaritu, ja lisaks ei aita see, kui $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k = 0$, meil leida sobivaid märke järjendi $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ jaoks, kui me a_{k+1} tagasi juurde paneme.

Töötav trikk on järjendit $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ natuke rohkem ümber teha ning asendada kaks viimast elementi nende vahega. Eraldi tuleb läbi vaadata juht, kus $a_k = a_{k+1}$. Siis on summa $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$ paarisarv, järelikult saame induktsiooni eelduse põhjal valida märgid nii, et $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{k-1} = 0$. Lisades sellele avaldisele $a_k - a_{k+1}$, on summa endiselt 0.

Kui $a_k \neq a_{k+1}$, võime eeldada, et $a_k < a_{k+1}$. Vastasel juhul saame a_k ja a_{k+1} ära vahetada, sest kui $a_{k+1} < a_k$, siis muuhulgas ka $a_{k+1} < k$; lisaks muidugi $a_k \leqslant k < k+1$.

Veendume, et järjend $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1} - a_k$ rahuldab induktsiooni eelduse tingimusi. Esiteks on tema liikmete summa sama paarsusega kui $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}$. Võrratused $1 \leqslant a_i \leqslant i$ kehtivad elementide $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ jaoks algse jada tingimuste tõttu. Lisaks näeme, et $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$, sest $a_{k+1} > a_k$ ning tegemist on täisarvudega. Samuti kehtib võrratus $a_{k+1} - a_k \leqslant (k+1) - 1 = k$, sest $a_{k+1} \leqslant k+1$ ja $a_k \geqslant 1$ ehk $-a_k \leqslant -1$.

Nüüd saame järjendile $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1} - a_k$ rakendada induktsiooni eeldust ning leida märgid nii, et $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{k-1} \pm (a_{k+1} - a_k) = 0$. Ükskõik, kas avaldise $a_{k+1} - a_k$ ette satub + või −, saame ikkagi ülesande tingimustele vastava märgivaliku kogu järjendi $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ jaoks.

1.19 Arvutame jada esimesed liikmed välja:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 = 1\,, \\ a_2 &= 1^2 - 2^2 = -3\,, \\ a_3 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 = 6\,, \\ a_4 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -10\,. \end{aligned}$$

Tekib hüpotees, et

$$a_n = \begin{cases} 1 + 2 + \ldots + n, & \text{kui } n \text{ on paaritu ja} \\ -(1 + 2 + \ldots + n), & \text{kui } n \text{ on paaris.} \end{cases}$$

Tõestame selle hüpoteesi induktsiooniga.

Induktsiooni baas juhtudel $n = 1$ ja $n = 2$ on juba kontrollitud. Induktsiooni sammu teeme samuti paaris ja paaritul juhul eraldi.

Kehtigu ülesande väide paarisarvu $n = k$ korral, st $a_k = -(1 + 2 + \ldots + k) = -\dfrac{k(k+1)}{2}$. Arv $k + 1$ on paaritu, järelikult

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 1^2 - 2^2 + \ldots - k^2 + (k+1)^2 = a_k + (k+1)^2 = \\ &= -\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 = (k+1) \cdot \left(-\frac{k}{2} + k + 1\right) = \\ &= (k+1) \cdot \left(\frac{k+2}{2}\right) = 1 + \ldots + (k+1)\,. \end{aligned}$$

Kehtigu ülesande väide paaritu $n = k$ korral, st $a_k = 1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Arv $k + 1$ on paaris, järelikult

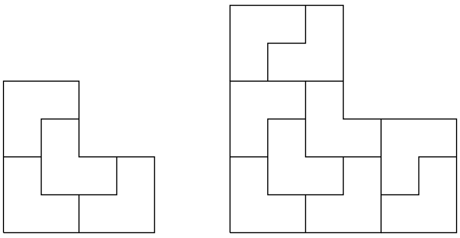
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 1^2 - 2^2 + \ldots + k^2 - (k+1)^2 = a_k - (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} - (k+1)^2 = (k+1) \cdot \left(\frac{k}{2} - (k+1)\right) = \\ &= (k+1) \cdot \left(-\frac{k+2}{2}\right) = -(1 + \ldots + (k+1))\,. \end{aligned}$$

Mõlemal juhul oleme tõestanud ülesande väite kehtivuse $n = k + 1$ jaoks.

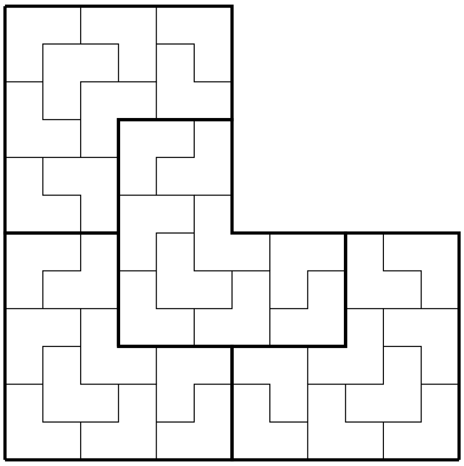
1.20 Juhul $k = 1$ kehtib ülesande väide triviaalselt.[5]

Suuremate k väärtuste jaoks kasutame tugevat matemaatilist induktsiooni. Induktsiooni baas koosneb seekord kahest juhust $k = 2$ ja $k = 3$; sobivad konstruktsioonid on näiteks niisugused:

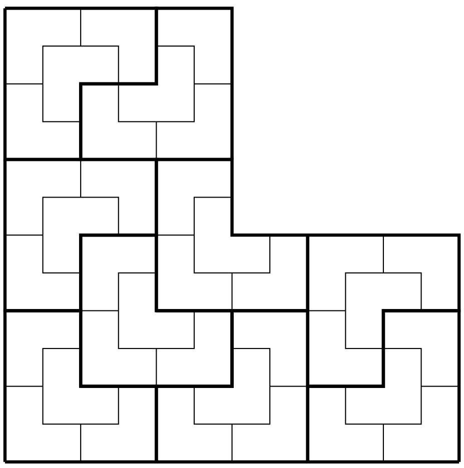
[5] Kui lugeda 0 naturaalarvuks, võime samuti öelda, et nurgiku küljepikkusega 0 saab katta 0 antud nurgikuga.



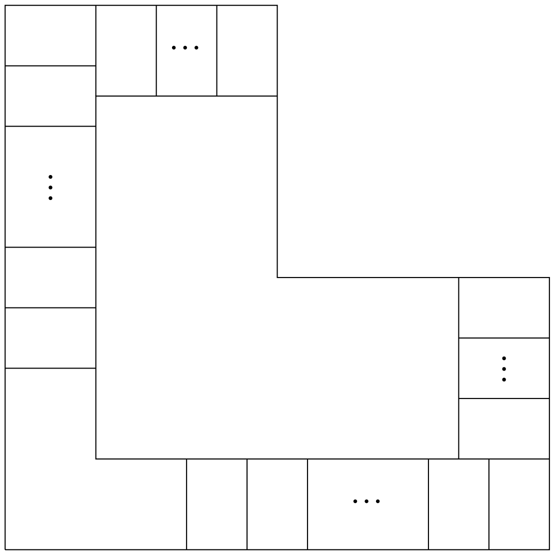
Juhul $k \geqslant 4$ vaatame eraldi läbi kaks varianti. Kui k on paarisarv, saame aluseks võtta konstruktsiooni $\frac{k}{2}$ puhul (mis induktsiooni eelduse põhjal eksisteerib). Jagame suure nurgiku neljaks nurgikuks lühema külje pikkusega $\frac{k}{2}$ ja need neli edasi nagu juhul $\frac{k}{2}$. Joonisel on toodud näide $k = 6$ jaoks.



Saab ka teistpidi. Jaotame suure nurgiku kõigepealt $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ nurgikuks lühema külje pikkusega 2 ning seejärel jagame kõik need nurgikud omakorda nii nagu juhul $k = 2$. Vastav jaotus $k = 6$ jaoks näeb siis välja järgmine:



Kui k on paaritu arv (st muuhulgas $k \geqslant 5$), saame induktsiooni eeldusest võtta aluseks konstruktsiooni $k-3$ korral (paneme tähele, et $k-3$ on paarisarv). Seda saab täiendada 2×3 klotsidega (mis on vajalikeks nurgikuteks jagatavad) ning konstruktsiooniga $k = 3$ jaoks nii nagu näha joonisel.



1.21 Vastus: $n = 1$ ja kõik paarisarvulised n väärtused.

Selleks, et aru saada, mis ülesaanes üldse toimub ja vastuse jaoks hüpotees leida, arvutame jada (a_n) esimesed liikmed välja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\,,\\
a_2 &= 2\cdot a_1 = 2\cdot 1 = 2\,,\\
a_3 &= 3\cdot(a_1+a_2) = 3\cdot(1+2) = 9\,,\\
a_4 &= 4\cdot(a_1+a_2+a_3) = 4\cdot(1+2+9) = 48\,,\\
a_5 &= 5\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4) = 5\cdot(1+2+9+48) = 300\,,\\
a_6 &= 6\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) = 6\cdot(1+2+9+48+300) = 2160\,.\\
a_7 &= 7\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) = 7\cdot(1+2+9+48+300+2160) = 17640\,.
\end{aligned}$$

Näeme, et

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \,\vdots\, 1! = 1\,,\\
a_2 &= 2 \,\vdots\, 2! = 2\,,\\
a_3 &= 9 \,\not\vdots\, 3! = 6\,,\\
a_4 &= 48 \,\vdots\, 4! = 24\,,\\
a_5 &= 300 \,\not\vdots\, 5! = 120\,,\\
a_6 &= 2160 \,\vdots\, 6! = 720\,,\\
a_7 &= 17640 \,\not\vdots\, 7! = 5040\,,
\end{aligned}$$

kus $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Saame hüpoteesi, et $a_n \,\vdots\, n!$, kui n on paarisarv, ja $a_n \not\vdots\, n!$, kui n on paaritu ($n = 1$ tundub olema erandjuht). Kuidas seda hüpoteesi tõestada?

Võiks proovida kasutada matemaatilist induktsiooni, aga saadud hüpotees pole väga "induktsioonisõbralikul" kujul. Näiteks pole selge, kuidas tuletada seosest $a_5 \not\vdots\, 5!$ seos $a_6 \,\vdots\, 6!$.

Otsime teistsugust lähenemist ning üritame leida jada (a_n) liime üldkuju.

Mängime natuke välja arvutatud liikmete tegurdustega ning paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
a_3 &= 9 = 3\cdot 3\,,\\
a_4 &= 48 = 4\cdot 4\cdot 3\,,\\
a_5 &= 300 = 5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\,,\\
a_6 &= 2160 = 6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\,,\\
a_7 &= 17640 = 7\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\,.
\end{aligned}$$

Saame järgmise hüpoteesi $a_n = \frac{n\cdot n!}{2}$ $(n \geqslant 3)$, kusjuures see hüpotees sobib ka $n = 2$ puhul, sest $a_2 = 2 = \frac{2\cdot 2!}{2}$.

Kuna ülesande tingimuste põhjal $a_n = n\cdot(a_1 + \ldots + a_{n-1})$, on püstitatud hüpotees samaväärne väitega $a_1 + \ldots + a_{n-1} = \frac{n!}{2}$ $(n \geqslant 2)$. See väide on aga juba väga mugaval kujul induktsiooniga tõestamise jaoks, sest avaldis $a_1 + \ldots + a_k$ on alati alamavaldis summas $a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}$.

Induktsiooni baas kehtib, sest $a_1 = 1 = \frac{2!}{2}$. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et mingi k korral kehtib võrdus $a_1 + \ldots + a_{k-1} = \frac{k!}{2}$ ning uurime summat

$$\begin{aligned}
a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k &= a_1 + \ldots + a_{k-1} + k\cdot(a_1 + \ldots + a_{k-1}) =\\
&= (k+1)\cdot(a_1 + \ldots + a_{k-1}) = (k+1)\cdot\frac{k!}{2} = \frac{(k+1)!}{2}\,,
\end{aligned}$$

nagu oligi tarvis.

Lahenduse lõpetuseks on nüüd lihtne täha, et $a_n = \frac{n\cdot n!}{2} \,\vdots\, n!$ parajasti siis, kui n on paarisarv. Lisaks tuleb eraldi kontrollida juht $n = 1$ (sest induktsiooniga tõestatud väide kehtis alates väärtusest $n = 2$); näeme, et ülesandes nõutud tingimus kehtib ka sel korral.

1.22 Väikeseid n väärtusi läbi proovides näeme, et $n = 1$ puhul ongi ainult üks võimalus, mis rahuldab ülesande tingimusi $(1\cdot 2 \,\vdots\, 2)$, aga $n = 2$ ja $n = 3$ puhul ei taha nõutud paarideksjagamine kuidagi õnnestuda.

Lahenduse võtmeks on katsetada mõnda üldist paarideksjagamise strateegiat ning uurida, milliste n väärtuste korral vajalik jaguvusseos kehtib. Erinevaid võimalikke strateegiaid on palju ning suur osa neist viib sihile. Peamine trikk on seejuures valida paarid nii, et nende korrutiste summa üldkuju oleks võimalikult lihtsalt leitav.

Üks võimalus on näiteks võtta paarid $(1, 2n-1), (2, 2n-2), \ldots, (n-1, n+1)$ ja $(n, 2n)$. Korrutis $n\cdot 2n$ jagub arvuga $2n$, niisiis võime uurida ülejäänud paaride korrutiste summa jääki jagamisel $2n$-ga:

$$\begin{aligned}
&1\cdot(2n-1) + 2\cdot(2n-2) + \ldots + (n-1)\cdot(2n-(n-1)) \equiv\\
\equiv\ &1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + \ldots + (n-1)\cdot(-(n-1)) =\\
=\ &-(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) \bmod 2n\,.
\end{aligned}$$

Kasutades ülesande 1.2 tulemust näeme, et uuritav summa jagub arvuga $2n$

parajasti siis, kui kehtivad järgmised seosed:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 &\vdots 2n,\\
\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} &\vdots 2n,\\
\frac{(n-1)(2n-1)}{6} &\vdots 2,\\
(n-1)(2n-1) &\vdots 12.
\end{aligned}
$$

Viimast tingimust rahuldavaid positiivseid täisarve on aga lõpmatult palju – sobivad näiteks kõik n väärtused, mille korral $n-1 \vdots 12$ ehk $n \equiv 1 \mod 12$.

Toodud strateegia pole kaugeltki ainus. Kui midagi paremat pähe ei tule, võib uurida näiteks avaldist $S(n) = 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \ldots + (2n-1)\cdot 2n$. Püüame välja mõelda selle avaldise üldkuju valemit. Selleks arvutame tema väärtuse mõnede väikeste n väärtuste korral ning tegurdame tulemused:

$$
\begin{aligned}
1\cdot 2 &= 2,\\
1\cdot 2+3\cdot 4 &= 14 = 2\cdot 7,\\
1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6 &= 44 = 4\cdot 11,\\
1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+7\cdot 8 &= 100,\\
1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+7\cdot 8+9\cdot 10 &= 190 = 10\cdot 19,\\
1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+7\cdot 8+9\cdot 10+11\cdot 12 &= 322 = 14\cdot 23.
\end{aligned}
$$

Näeme, et hakkab välja kujunema muster. Enamasti jagub summa $S(n)$ arvuga $4n-1$, välja arvatud juhtudel $S(1) = 2$ ja $S(4) = 100$. Kas need väärtused ongi kuidagi erandlikud?

Ei! Tuletame veelkord meelde ülesannet 1.2, mille avaldis esitus murruna. Nii saame ka siin esitada $S(1) = 2 = \frac{2}{3}\cdot 3$ ning $S(4) = 100 = \frac{20}{3}\cdot 15$. Kirjutame kõik avaldised veelkord välja murdudena, mille nimetajaks on 3:

$$
\begin{aligned}
S(1) &= 2 = \frac{2\cdot 3}{3},\\
S(2) &= 14 = \frac{6\cdot 7}{3},\\
S(3) &= 44 = \frac{12\cdot 11}{3},\\
S(4) &= 100 = \frac{20\cdot 15}{3},\\
S(5) &= 190 = \frac{30\cdot 19}{3},\\
S(6) &= 322 = \frac{42\cdot 23}{3}.
\end{aligned}
$$

Nüüd on selge, et avaldise $S(n)$ üldkujuks võiks sobida $\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$. Tõestame selle hüpoteesi matemaatilise induktsiooniga.

Induktsiooni baas on juba kontrollitud. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et $n = k$ korral kehtib seos $S(k) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{3}$ ning uurime avaldist

$S(k+1)$:

$$\begin{aligned}
S(k+1) = S(k) + (2k+1)(2k+2) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{3} + (2k+1)(2k+2) = \\
= (k+1)\left(\frac{k(4k-1)}{3} + 2(2k+1)\right) = (k+1)\left(\frac{4k^2-k}{3} + 4k+2\right) = \\
= (k+1)\frac{4k^2-k+12k+6}{3} = (k+1)\frac{4k^2+11k+6}{3} = \\
= (k+1)\frac{(k+2)(4k+3)}{3} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(4(k+1)-1)}{3},
\end{aligned}$$

mis lõpetab induktsiooni sammu tõestuse.

Nüüd saame uurida, mis tingimustel jagub avaldis $S(n)$ arvuga $2n$:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(4n-1)}{3} &\vdots\, 2n, \\
\frac{(n+1)(4n-1)}{3} &\vdots\, 2, \\
(n+1)(4n-1) &\vdots\, 6.
\end{aligned}$$

Viimane seos kehtib jällegi lõpmata paljude n väärtuste korral, täpsemalt siis, kui $n \equiv 1 \bmod 6$ või $n \equiv 5 \bmod 6$.

Arvutiülesanne 1.1 Kirjuta arvutil programm, mis proovib erinevate n väärtuste jaoks läbi arvude $1, 2, \dots, 2n$ juhuslikke paarideksjaotusi ning uurib saadava korrutiste summa jagumist $2n$-ga. Kas peale $n = 2$ ja $n = 3$ leidub veel mõni väärtus, mille korral nõutud paarideksjagamine ei õnnestu? Kas suudad sõnastada ja tõestada üldise tulemuse, milliste n väärtuste korral sobiv paarideksjaotus leidub?

1.23 Vastus: 0, kui n on paaritu, ja $\left(2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$, kui n on paaris.

Nimetame roboti liikumist tipust tippu sammuks ning tähistame need kaks kaheksanurga tippu, mis asuvad tippudest A ja B kahe sammu kaugusel, vastavalt C ja D. Kohe on selge, et paarisarvu sammudega on võimalik jõuda ühte tippudest A, B, C, D ning paaritu arvu sammudega ühte ülejäänud neljast tipust. (Tõestuseks võime kaheksanurga tipud värvida vaheldumisi mustaks ja valgeks ning panna tähele, et üks samm viib alati vastasvärgi tipule; värvimise võttest räägime põhjalikumalt jaotises 6.) Muuhulgas tähendab see, et paarituarvulise n väärtuse korral on 0 võimalust jõuda n sammuga tipust A tippu B.

Selleks, et saada aimu, mis ülesandes toimub, proovime väikeseid paarisarve läbi. $n = 2$ ja $n = 4$ puhul on vastusteks ilmselt vastavalt 0 ja 2. $n = 6$ puhul tuleb tippu B jõudmiseks teha 5 sammu päripäeva ja 1 vastupäeva või vastupidi. 6-st sammust ühe vastupäeva (või ühe päripäeva) liikumise väljavalimiseks on C_6^1 võimalust, kokku seega on erinevaid võimalikke viise $2 \cdot C_6^1 = 12$. (Kombinatsioonide arvude C_n^m kohta saad täpsemalt lugeda jaotisest 7).

$n = 8$ korral peame tegema 6 sammu päri- ja 2 vastupäeva (või vastupidi) ning $n = 10$ korral 7 päri- ja 3 vastupäeva (või vastupidi). Niisiis on võimaluste arvud selleks vastavalt $2 \cdot C_8^2 = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 56$ ja $2 \cdot C_{10}^3 = 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 240$. Pannes tähele, et

$$2 = 1 \cdot 2, \quad 12 = 3 \cdot 4, \quad 56 = 7 \cdot 8 \quad \text{ja} \quad 240 = 15 \cdot 16,$$

tekib hüpotees, et otsitav väärtus võiks olla $(N-1)\cdot N$, kus $N=2^{\frac{n}{2}-1}$.

Kahjuks pole seda arutluskäiku eriti lihtne üldistada. $n=12$ puhul peame tegema 8 sammu päri- ja 4 vastupäeva (või vastupidi) või 12 sammu ühes kahest võimalikust suunast. Võimaluste koguarvuks saame

$$2\cdot C_{12}^4+2=2\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+2=992=31\cdot 32\,,$$

mis kinnitab leitud hüpoteesi, aga samas hakkab selguma ka probleem. n-i kasvades saab tipuni B jõuda järjest rohkemate "ringidega", mis muudab võimaluste arvu avaldise üha pikemaks, ja pole selge, kuidas seda lihtsustada.

Lihtsamale lahendusele viib hoopis idee teha rohkem, kui ülesandes nõutud, ning leida lisaks ka võimaluste arvud jõuda n sammuga tippudesse A, C ja D.

Tähistame võimaluste arvu jõuda n sammuga tippudesse A, B, C, D vastavalt a_n, b_n, c_n, d_n. Ilmselt $a_0=1$ ja $b_0=c_0=d_0=0$. Paneme tähele, et iga paarisarvu $n\geqslant 0$ korral kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
a_{n+2}&=2a_n+c_n+d_n\,,\\
b_{n+2}&=2b_n+c_n+d_n\,,\\
c_{n+2}&=2c_n+a_n+b_n\,,\\
d_{n+2}&=2d_n+a_n+b_n\,.
\end{aligned}$$

Tõepoolest, tippu A võib kahe sammuga jõuda tipust A kahel moel ning tippudest C ja D kummastki ühel moel; teiste võrduste põhjendus on analoogiline.

Hüpoteesi otsimiseks arvutame a_n, b_n, c_n, d_n väärtused mõnede väikeste n-ide jaoks välja:

$$\begin{array}{lll}
a_2=2\cdot 1+0+0=2\,, & a_4=2\cdot 2+1+1=6\,, & a_6=2\cdot 6+4+4=20\,,\\
b_2=2\cdot 0+0+0=0\,, & b_4=2\cdot 0+1+1=2\,, & b_6=2\cdot 2+4+4=12\,,\\
c_2=2\cdot 0+1+0=1\,, & c_4=2\cdot 1+2+0=4\,, & c_6=2\cdot 4+6+2=16\,,\\
d_2=2\cdot 0+1+0=1\,, & d_4=2\cdot 1+2+0=4\,, & d_6=2\cdot 4+6+2=16\,.
\end{array}$$

Tekib hüpotees, et $a_n=N\cdot(N+1)$, $b_n=(N-1)\cdot N$, ja $c_n=d_n=N\cdot N$, kus $N=2^{\frac{n}{2}-1}$. Tõestame selle hüpoteesi induktsiooniga.

Induktsiooni baas on läbitehtud näidetega juba tõestatud. Induktsiooni sammu jaoks kasutame eelpooltuletatud võrdusi:

$$\begin{aligned}
a_{n+2}&=2a_n+c_n+d_n=2\cdot N\cdot(N+1)+2\cdot N\cdot N=4N^2+2N=2N\cdot(2N+1)=\\
&=2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}}+1\right)=2^{\frac{n+2}{2}-1}\cdot\left(2^{\frac{n+2}{2}-1}+1\right),\\
b_{n+2}&=2b_n+c_n+d_n=2\cdot(N-1)\cdot N+2\cdot N\cdot N=4N^2-2N=(2N-1)\cdot 2N=\\
&=\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}}=\left(2^{\frac{n+2}{2}-1}-1\right)\cdot 2^{\frac{n+2}{2}-1},\\
c_{n+2}&=2c_n+a_n+b_n=2\cdot N\cdot N+N\cdot(N+1)+(N-1)\cdot N=4N^2=2N\cdot 2N=\\
&=2^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{n+2}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n+2}{2}-1}
\end{aligned}$$

ning analoogiliselt ka d_{n+2} korral. Sellega on induktsiooni samm lõpetatud ja muuhulgas oleme tõestanud, et $b_n=\left(2^{\frac{n}{2}-1}-1\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$.